

# RESUMEN DE TESIS DOCTORAL

## Compensación Automática de Fuerzas Dinámicas en Sistema Rotatorios *Automatic Compensation of Dynamical Forces in Rotating Systems*

**Graduado: Marco Antonio Meraz Melo**

Centro de Ingeniería y Desarrollo Industrial.

Playa Pie de la Cuesta 702 Col Desarrollo San Pablo, C. P. 76130

Queretaro, Qro.

[ameraz69@hotmail.com](mailto:ameraz69@hotmail.com)

*Graduado en Noviembre 28, 2008.*

**Director de Tesis: Tadeusz Majewski Szymiec.**

Universidad de las Americas Puebla

Santa Catarina Martir, Cholula, Puebla. C. P. 72820, México.

[tadeusz.majewski@udlap.mx](mailto:tadeusz.majewski@udlap.mx)

**Co-director de Tesis: Germán Ardul Muñoz Hernández.**

Instituto Tecnológico de Puebla

Av. Tecnológico 420. Col. Maravillas, C. P. 72220.

Puebla, Pue.

[gmuñoz64@hotmail.com](mailto:gmuñoz64@hotmail.com)

### Resumen

El enfoque inicial de este estudio es el desarrollo de representaciones de parámetros conectados en rotores flexibles y sus sistemas de auto-balance acoplados. Su objetivo es derivar un conjunto de ecuaciones independientes para cada sección de estudio dentro del eje del rotor y posteriormente aplicar el método de Rigidez para ensamblar una matriz generalizada del comportamiento global del eje y sus masas. En este desarrollo se han encontrado los coeficientes asociados, es decir; el efecto que provocan los tramos en sí mismos y en sus conexiones. Se han analizado las bolas o esferas dinámicamente por medio de Lagrange para definir de la mejor manera los sistemas de ecuaciones diferenciales. Se realizó un prototipo experimental emulando las condiciones teóricas y simuladas en Software, obteniendo resultados muy similares a los encontrados matemáticamente. Se encontraron los valores de frecuencia y masas asociadas donde el método se vuelve efectivo.

**Palabras clave:** Sistema de Autobalance, Lagrange.

### Abstract

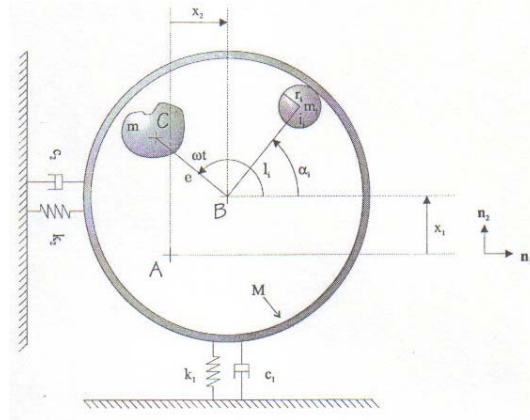
The main objective of this thesis is the development of parameter representations which are interconnected in flexible rotor and autobalance systems coupled. This goal consists in achieving independent set of differential equations for each section of the shaft and applying stiffness method to obtain a global matrix. These models have been used to analyze elastic and inertial properties of rotors. After we obtain a global matrix, we can establish a set of differential equations, which may be simulated by software and analyzed stability and dynamical behavior of our complete system. Inertial associated coefficients have been founded in this model, by the way; effects by each section and connections have been gotten. Dynamical behavior of balls and rotor has been analyzed by Lagrange method to get a differential equations system. In the case of a single rotor and a single drum (with balls) in different plane, an experimental model was developed; theoretical (software) and experimental results were similar, and this showed the efficiency of the balancing method. There are several conditions of mass, stiffness and frequency which system works, these characteristics were founded.

**Keywords:** Autobalance system, Lagrange.

## 1 Estado del Arte de Sistema de Balance Automático en Sistemas Rotatorios

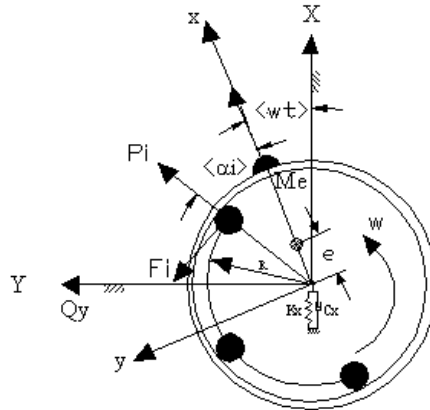
En este tipo de sistemas, las investigaciones iniciales fueron hechas por Thearle [11,12], Alexander [2] y Cade[3] por el año de 1965. En estos estudios se propusieron masas inerciales que giraban con el rotor y se buscaba una posición ideal para corregir automáticamente el desbalance.

Otros tipos de análisis pueden ser encontrados en la referencia [1], en este estudio se plantea un análisis en el mismo plano de las fuerzas de desbalance con las fuerzas de corrección de vibración, ambas fuerzas concentradas en el mismo disco o rotor, eliminando con esto momentos dinámicos que se generan al existir una distancia entre el disco corrector de vibración y el propio rotor. También es válido decir que sólo se analizan características de operación dentro de un enfoque radial. Los resultados de esta investigación reflejan zonas de estabilidad y de inestabilidad en función de rangos de frecuencia, y de diferentes tipos de carga.



**Fig. 1.** Esquema de sistema de autobalance acoplado en el mismo plano

El análisis de la referencia [7] de Majewski propone un sistema en equilibrio igualando las fuerzas de desbalance, en primera instancia estático  $Me$  véase la figura 2, con las fuerzas de corrección provocadas por un grupo de esferas o bolas girando con el sistema eje-rotor. A diferencia de la investigación anterior, aquí se encuentra un rango de operación donde se optimiza el balanceo y también se pueden determinar la posición que tomarían las bolas.



**Fig. 2.** Esquema del análisis de fuerzas de un sistema de autobalance por medio de esferas que compensan el desbalance  $Me$

Chung and Ro [4] estudiaron la estabilidad y el comportamiento dinámico de un sistema de autobalance para un rotor tipo Jeffcott, ellos derivaron un sistema de ecuaciones de movimiento para un sistema autónomo usando un sistema de coordenadas polares en lugar de coordenadas rectangulares, utilizaron ángulos de Euler y una matriz de transformación para establecer el comportamiento tanto de las bolas como del centro de gravedad del sistema eje-rotor. Ellos también tomaron un eje de masa despreciable. Posteriormente usaron el criterio de Routh-Hurwitz para

analizar la estabilidad del sistema de ecuaciones diferenciales y por último realizaron una simulación de tales ecuaciones para su representación gráfica.

Hwang and Chung [6] aplicaron esta aproximación (la que utilizaron Chung y Ro [4]) para un análisis similar con raíces dobles, el término de raíces dobles se refiere a que; al final del análisis se obtiene una ecuación en la que se ven inmersos tanto la masa del sistema como su rigidez y sus movimientos asociados y esta ecuación a su vez tiene elementos con ángulos dobles. Chung and Hang [5] estudiaron un caso similar pero para un eje flexible tipo Stodola-Green, se hace un proceso semejante a [4] y se obtienen resultados importantes. Para aclarar un poco más el conocimiento del significado de un rotor tipo Jeffcott y Stodola-Green, el modelo tipo Jeffcott es un sistema donde el rotor se encuentra centrado como el caso de una viga (eje) y con una carga al centro (rotor) simplemente apoyado y en el caso del modelo tipo Stodola-Green sería homólogo a una viga empotrada en un extremo y con la carga (rotor) en voladizo en el otro extremo, en "cantiliver", ver figura 3.

En este caso particular, el autor ha hecho un análisis homólogo pero apoyándose en el método de rigidez debido a la particularidad con que esta metodología ataca a este tipo de problemas y los modelos estudiados son sistemas híbridos de los anteriores que serían más comunes en la industria.

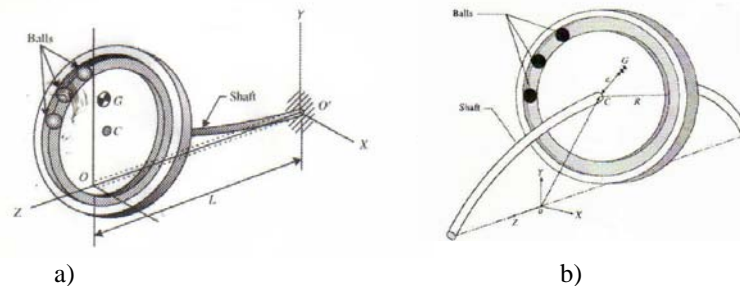
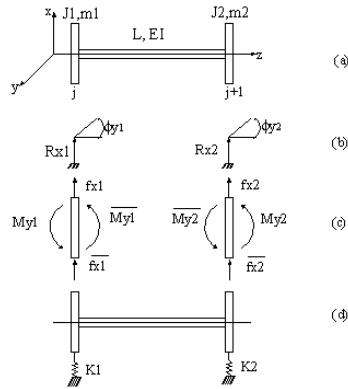


Fig. 3. Esquemas representativos de modelos; a) Stodola-Green y b) tipo Jeffcott

Majewski ha desarrollado modelos de aplicaciones prácticas que han sido simulados y en donde se destaca que existe estabilidad para ciertos rangos de operación, además de proporcionar sistemas de ecuaciones diferenciales que han servido de guía en modelos consecuentes como el del presente trabajo [8-10]. Explicó que las esferas se colocan en posiciones opuestas al desbalance cuando se tiene una componente de vibración, es decir; en una sola dirección. Después de haber presentado de manera muy breve lo que han hecho importantes investigadores en el campo de la rotodinámica y de los sistemas de autobalance es importante presentar el concepto básico de la formulación de ecuaciones diferenciales por el método de la viga de Euler que se basa típicamente en el análisis de segmentos de eje o viga en los cuales se asume que existen desplazamientos de traslación y rotacionales en sus extremos.

#### Método de la Matriz de Rigidez para Análisis Rotodinámico.

Este método, en nuestro modelo se utiliza para expresar la relación que existe entre el plano del rotor y el disco o discos de balanceo, generando con esto unos coeficientes que expresan las fuerzas actuantes entre sí. A continuación se expone la definición de matriz de rigidez y se explica en detalle la derivación de matrices de rigidez que son apropiadas para n-cuerpos de parámetros-pequeños, del modelo rotor de la figura 4. Es principalmente importante comprometerse con las condiciones estáticas y referiremos al cuerpo rígido imaginario entre dos miembros como una conexión. El método de rigidez produce un acercamiento sistemático para procesos de una matriz de rigidez para el modelo doble cuerpo de la figura 4(a), basado en las ecuaciones estáticas de equilibrio en las conexiones. Este procedimiento será demostrado por la primera derivada de la matriz de rigidez para el modelo doble-cuerpo de la figura 4.



**Fig. 4.** Modelo de rotor con doble-rotor con parámetros-pequeños. (a) Modelo libre-libre con inercia, geometría, y propiedades de rigidez; (b) grados de libertad; (c) aplicación y fuerzas de reacción; (d) rotor soportado elásticamente

**Modelo Doble-Rotor con Parámetro Acoplado**

El modelo ilustrado en la figura 4(a) consta de dos discos unidos por una viga con eje elástico, y los cuatro grados de libertad de este sistema simplemente apoyado son mostrados en la figura 4(b). Asumimos aquí que todas las fuerzas externas son aplicadas a los cuerpos rígidos (o conexiones) del modelo, y la figura 4(c) ilustra la resultante externa y las fuerzas de reacción y momentos. Restringimos nuestra atención a condiciones de balance, el equilibrio de los cuerpos rígidos (o conexiones) producen las siguientes ecuaciones simples, tales ecuaciones son la suma de fuerzas en los discos o puntos de unión entre segmentos particulares que al ser unidos forman el sistema total de longitud \$L\$:

$$\begin{aligned}
 f_{x1} + \bar{f}_{x1} &= 0 & f_{x2} + \bar{f}_{x2} &= 0 \\
 M_{y1} + \bar{M}_{y1} &= 0 & M_{y2} + \bar{M}_{y2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

En esta condición las fuerzas externas \$f\_{x1}\$ e internas (o de reacción) \$\bar{f}\_{x1}\$ y los momentos respectivos, se igualan a cero. Las fuerzas de reacción y momentos son relacionados a las deflexiones de la figura 4(b) con la definición de la matriz de rigidez que se cita a continuación.

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_{X1} \\ \bar{M}_{Y1} \\ \bar{f}_{X2} \\ \bar{M}_{Y2} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{X1} \\ \phi_{Y1} \\ R_{X2} \\ \phi_{Y2} \end{Bmatrix}
 \tag{2}$$

La interpretación física del elemento \$K\_{ij}\$ es que \$-K\_{ij}\$ es la fuerza \$i\$th (o momento) correspondiendo a la deflexión de la unidad \$j\$ con todas las demás deflexiones igualadas a cero. Por ejemplo la primera columna de esta matriz define las fuerzas de reacción (negativas) y momentos actuando en los dos cuerpos rígidos obligando a \$(R\_{X1} = 1, R\_{X2} = \beta\_{Y1} = \beta\_{Y2} = 0)\$.

## 2 Obtención del Sistema de Ecuaciones Dinámicas del Modelo

En la siguiente propuesta, se realiza un análisis dinámico del rotor y el disco de Bolas existiendo entre ellos una longitud  $L_2$ , la cual provoca momentos que influyen en el comportamiento mutuo del rotor y el mismo disco de balanceo, esto será analizado de una manera equivalente.

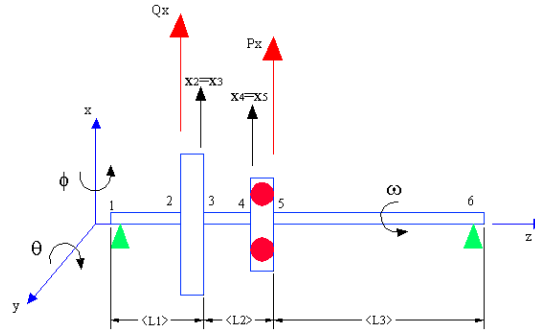


Fig. 5. Esquema de un modelo de 4 GDL, con  $L_2$

El análisis de este modelo consiste en tomar en cuenta todos los movimientos tanto de traslación como de rotación y sus fuerzas asociadas, la rigidez del eje se ve afectada debido a la longitud intermedia que existe entre el rotor y el disco de bolas  $L_2$ , provocando con esto unos coeficientes de influencia  $k_1$  y  $k_2$ . Basándose en la figura siguiente:

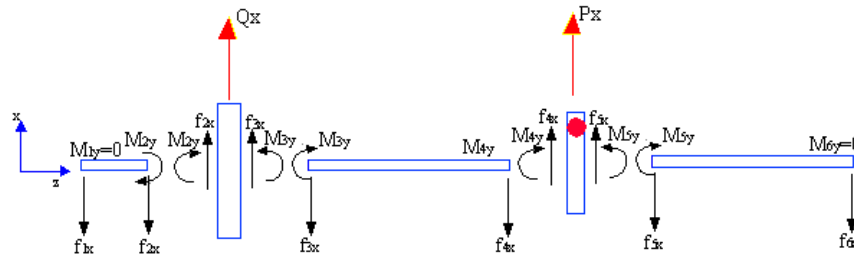


Fig. 6. Esquema de fuerzas y momentos del modelo de 4 GDL, con  $L_2$

Para el primer tramo (por ejemplo) de la figura 6 se tiene el arreglo matricial:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ 0 \\ f_{2x} \\ M_{2x} \end{Bmatrix} = [-K^1] \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ x_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Recordando que en puntos de contacto del eje,  $x_2 = x_3, x_4 = x_5, \theta_2 = \theta_3, \theta_4 = \theta_5$ . La interacción que se tiene entre el rotor y el disco de corrección es:

$$x_4 = b_1 x_2(t) + c_1 \theta_2(t) + d_1 P_{ix} \quad (4)$$

$$\theta_4 = b_2 x_2(t) + c_2 \theta_2(t) + d_2 P_{ix} \tag{5}$$

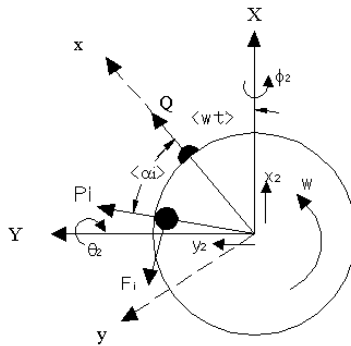
De acuerdo al método de rigidez se genera una interacción en la coordenada  $x_4$  ( $x_2$ ,  $\theta_2$  y  $P_{ix}$ ); debido a los momentos dinámicos que se produjeron por efecto de la distancia  $L_2$ , entre el rotor y el disco de bolas, esto provoca unos coeficientes de influencia  $k_1$  y  $k_2$  de las bolas con respecto al rotor, su representación algebraica está definida por:

$$k_1 = f(L_2) \quad \text{y} \quad k_2 = f(L_3) \tag{6}$$

El manejo del método de rigidez lleva a la obtención de los coeficientes  $K_x$ ,  $K_{x\phi}$ ,  $K_\phi$ ,  $K_y$ ,  $K_{y\theta}$ ,  $K_\theta$ , estos se utilizarán más adelante para estructurar el sistema de ecuaciones global.

**Análisis de la bola:**

Para vibraciones en los planos X-Z y Y-Z, las componentes de la velocidad de la bola  $i$ :



**Fig.7.** Esquema del rotor, su fuerza de desbalance  $Q$  y su fuerza de balance provocada por las bolas  $P_i$

$$\vec{V}_i = [\dot{x}_2 - R(\omega + \alpha_i) \sin(\omega t + \alpha_i)]\hat{i} + [\dot{y}_2 + R(\omega + \alpha_i) \cos(\omega t + \alpha_i)]\hat{j} + [\phi_2 R \sin(\omega t + \alpha_i) - \theta_2 R \cos(\omega t + \alpha_i)]\hat{k} \tag{7}$$

A partir de la velocidad de la bola (tomado como una partícula), se puede calcular su energía cinética:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2 \tag{8}$$

Elevando al cuadrado (7) y tomando en cuenta la ecuación (8):

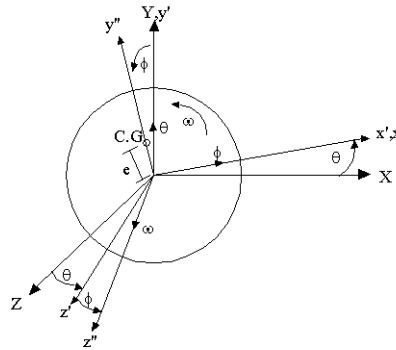
$$T_i = \frac{1}{2} m_i \left\{ \left[ \dot{x}_2 - R(\omega + \alpha_i) \sin(\omega t + \alpha_i) \right]^2 + \left[ \dot{y}_2 + R(\omega + \alpha_i) \cos(\omega t + \alpha_i) \right]^2 + \left[ \phi_2 R \sin(\omega t + \alpha_i) - \theta_2 R \cos(\omega t + \alpha_i) \right]^2 \right\} \tag{9}$$

Y aplicando la ecuación general de Lagrange para la posición de las bolas, donde  $P_i$  es la fuerza de reacción al movimiento y despreciando los términos de alto grado  $\dot{\alpha}^2$ ,  $\alpha \bullet \dot{\alpha}$ ,  $\alpha \bullet \ddot{\alpha}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \{\dot{\alpha}_i\}} \right) - \frac{\partial T_i}{\partial \{\alpha_i\}} + \frac{\partial V_i}{\partial \{\alpha\}} = \left\{ \sum Q_{ai} \right\} \tag{10}$$

**Análisis del Rotor:**

Haciendo una análisis similar, pero ahora con respecto al rotor; en este caso, se tomará como punto en cuestión el centro de gravedad del rotor con respecto al sistema de coordenadas XYZ, teniendo presente que el centro de gravedad está desplazado una excentricidad  $e$ , empezando por la figura 8, se tiene:



**Fig.8.** Esquema del rotor con su centro de gravedad y sus ángulos de Euler

$\theta, \dot{\phi}$  = Velocidades angulares en las direcciones  $x'$  y  $y'$ , representadas por la regla de la mano derecha. Téngase presente  $\theta, \dot{\phi}$  son pequeños.

La energía cinética de traslación está dada por:

$$T_{tras} = \frac{1}{2} M [(\dot{x}_2 - e\omega \sin \omega t) i + (\dot{y}_2 + e\omega \cos \omega t) j + (\dot{\phi}_2 e \sin \omega t - \theta_2 e \cos \omega t) k]^2 \tag{11}$$

La energía cinética de rotación está definida por:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I (\theta \cos \phi)^2 + \frac{1}{2} J (\omega - \theta \sin \phi)^2 \tag{12}$$

En este caso; I (momento de masa del rotor simétrico) se refleja con respecto los ejes x, y; y J se refleja con respecto al eje z. En suma:  $T_{rotor} = T_{tras} + T_{rot}$

La energía cinética total en el sistema queda determinada por:

$$T = T_{rotor} + \sum T_i \tag{13}$$

Aplicando Lagrange nuevamente para esta energía cinética del rotor donde la variable generalizada está delimitada por las variables de movimiento  $F(x_2, y_2, \phi_2, \theta_2)$  con respecto al sistema de coordenadas inercial o fijo XYZ. Tras haber obtenido las ecuaciones diferenciales de las esferas y del rotor se puede hacer un arreglo generalizado de todo el sistema. Este se presenta a continuación de manera esquematizada. Tener presente que  $K_x, K_{x\phi}$  y  $K_y, K_{y\theta}$  se han obtenido anteriormente:

En los planos X-Z y Y-Z:

$$(M + \sum m_i)x_2 + K_x X_2 + K_{x\phi}\phi_2 = Q_x + k_1 \sum P_{ix} \tag{14}$$

$$(M + \sum m_i)y_2 + K_y Y_2 + K_{y\theta}\theta_2 = Q_y + k_2 \sum P_{iy} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} & \left[ I + \sum mR^2 \sin^2(\omega t + \alpha_i) \right] \ddot{\phi}_2 - \frac{1}{2} \sum mR^2 \sin 2(\omega t + \alpha_i) \ddot{\theta}_2 \\ & + \left[ c_\phi - \omega \sum mR^2 \sin 2(\omega t + \alpha_i) \right] \dot{\phi}_2 + \left[ J - \sum mR^2 \cos 2(\omega t + \alpha_i) \right] \omega \theta_2 + K_\phi \phi_2 + K_{\phi x} X_2 = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{1}{2} \sum m_i R^2 \sin 2(\omega t + \alpha_i) \right] \ddot{\phi}_2 + \left[ I + \sum m_i R^2 \cos^2(\omega t + \alpha_i) \right] \ddot{\theta}_2 \\ & + \left[ J + \sum m_i R^2 \cos 2(\omega t + \alpha_i) \right] \omega \phi_2 + \left[ c_\theta - \omega \sum m_i R^2 \sin 2(\omega t + \alpha_i) \right] \dot{\theta}_2 + K_\theta \theta_2 + K_{\theta y} Y_2 = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Las fuerzas asociadas con este sistema de ecuaciones diferenciales, en el lado derecho de la desigualdad:

$$Q_x = Me\omega^2 \cos \omega t \tag{18}$$

$$Q_y = Me\omega^2 \sin \omega t \tag{19}$$

$$P_{ix} = m_i R_i (\omega + \alpha_i)^2 \cos(\omega t + \alpha_i) \tag{20}$$

$$P_{iy} = m_i R_i (\omega + \alpha_i)^2 \sin(\omega t + \alpha_i) \tag{21}$$

### 3 Simulación del sistema por medio de Software

Nuevamente se insertan las ecuaciones diferenciales en el software matemático con los parámetros que se dan a continuación y se obtienen los siguientes resultados:

Dimensiones del rotor:  Diámetro del eje: 20 mm=0.020 m E=210 GPa M=35 kg. m=0.15 kg. L <sub>1</sub> =0.35 m L <sub>2</sub> = 0.225 m. L <sub>3</sub> =0.475 m.	Algunos parámetros obtenidos (en esta tabla solo el plano x-z): K <sub>x</sub> = 130 kN/m K <sub>φ</sub> = 22 kN-m K <sub>xφ</sub> = -30603 N L = 1.05 m R = 0.15 m ω = 100 rad/seg, ω <sub>0</sub> = 83 rad/seg.
---	---

Se puede ver que en la figura 9 a se logra un balanceo en poco tiempo, mientras que en las oscilaciones (cabeceo) del rotor no se logra un balanceo fino, aún así las bolas se colocan en 2 y 4 radianes aproximadamente.



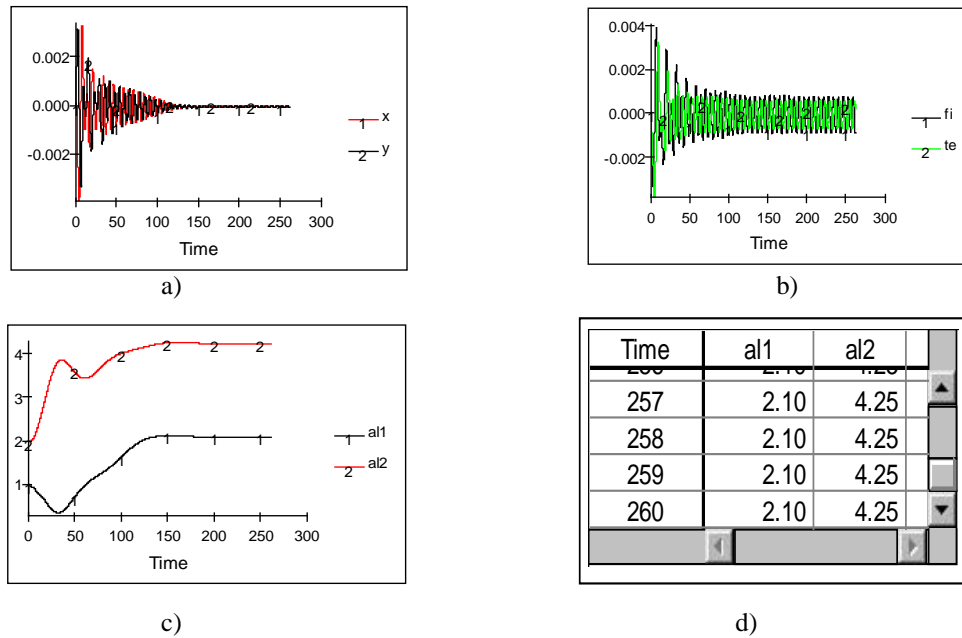


Fig. 9. Gráficos del comportamiento del desplazamiento lineal y angular del sistema. a) Desplazamiento lineal; b) Desplazamiento angular, c y d) Posición final de las bolas en función del tiempo

#### 4 Fuerzas de Vibración en el Modelo

Debido a que existe una longitud o distancia  $L_2$  considerable entre el rotor y el disco que contiene las bolas, se crean momentos dinámicos que afectan mutuamente a ambos, el rotor y el sistema de autobalance. En base a este sistema, se especifica que el sistema de coordenadas utilizado y las variables de los movimientos en el rotor y el disco balanceador son  $x_2$  y  $x_4$ , para el plano x-z.

$$\ddot{P}_x = -\omega^2 P_x, \quad y; \quad x_4 = -b_1 \omega^2 x_2 - c_1 \omega^2 \theta_2 - d_1 \omega^2 P_x \quad (22)$$

Partiendo de las ecuaciones de movimiento generales que se ven en vibraciones Mecánicas:

$$x_2(t) = (A_{cx} \cos \omega t + A_{sx} \sin \omega t) + \sum_i [A_{cxi} \cos(\omega t + \alpha_i) + A_{sxi} \sin(\omega t + \alpha_i)] \quad (23)$$

$$\theta_2(t) = (A_{c\theta} \cos \omega t + A_{s\theta} \sin \omega t) + \sum_i [A_{c\theta i} \cos(\omega t + \alpha_i) + A_{s\theta i} \sin(\omega t + \alpha_i)] \quad (24)$$

Teniendo presente que  $A_{cx}$  y  $A_{sx}$  se refieren a las amplitudes de los movimientos en x y y del rotor por el desbalance  $Q_x$ ;  $A_{cxi}$  y  $A_{sxi}$  a las amplitudes de los movimientos en x y y del disco de bolas, similarmente los otros coeficientes de la ecuación (22) son relativos a las oscilaciones de ambos discos (medidos con el ángulo  $\theta$ ) en sus respectivos ejes de coordenadas x y y.

Para movimientos pequeños de las bolas con respecto al disco de balanceo (la velocidad de la bola es pequeño,  $\dot{\alpha}_i \ll \omega$ ), y se puede asumir que al derivar 2 veces las ecuaciones (23) y (24) queda:

$$\ddot{x}_2 \cong -\omega^2 x_2 \quad y \quad \ddot{\theta}_2 \cong -\omega^2 \theta_2 \quad (25)$$

Apoyándose en la ecuación (25) se puede establecer que la Fuerza generalizada de la bola  $F_i$  está en función de dos componentes en las direcciones X y Y, también se puede observar en la figura 10 que la bola está en función de los ángulos,  $\omega t$  provocado por el desbalance y  $\alpha_i$  provocado por la posición de la bola  $i$ . Estas fuerzas deben estar en equilibrio para que se logre el balanceo estático.

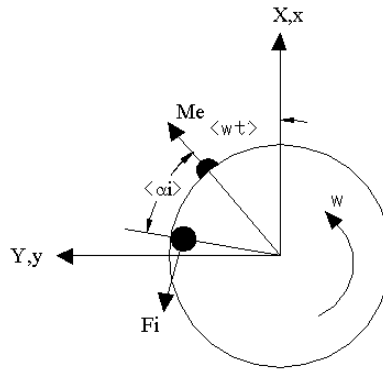


Fig. 10. Esquema del disco de corrección de vibración y la fuerza  $F_i$  asociada a la bola

$$F_i = m_i [ \dot{x}_4 \sin(\omega t + \alpha_i) - y_4 \cos(\omega t + \alpha_i) ] \quad (26)$$

Haciendo un análisis de  $F_i$  solamente en una componente de vibración  $x_4$ :

$$\bar{F}_i^{x_4} = F_i = m_i \dot{x}_4 \sin(\omega t + \alpha_i) = -m_i \omega^2 [ b_{11x} x_2 + c_{11x} \theta_2 + d_{11x} P_x ] \sin(\omega t + \alpha_i) \quad (27)$$

La fuerza  $F_i^{x_4}$  está cambiando en el tiempo e incluso depende de la posición de las bolas. Por lo tanto se puede decir que el comportamiento de las bolas depende de la fuerza promedio sobre el ciclo de vibración donde el período  $T=2\pi/\omega$ .

$$F_i^{x_4} = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{F}_i^{x_4} dt \quad (28)$$

Agrupando y haciendo la suma de todos los componentes obtenidos a partir de (27), se puede obtener la fuerza generalizada de la bola:

$$F_i(x_4) = -0.5m_i\omega^2 \left\{ \begin{array}{l} b_1 \left[ A_{cx} \cos \alpha_i + A_{sx} \sin \alpha_i + \sum_j [A_{cxj} \cos(\alpha_i - \alpha_j) + A_{sxj} \sin(\alpha_i - \alpha_j)] \right] + \\ c_1 \left[ A_{c\theta} \cos \alpha_i + A_{s\theta} \sin \alpha_i + \sum_j [A_{c\theta j} \cos(\alpha_i - \alpha_j) + A_{s\theta j} \sin(\alpha_i - \alpha_j)] \right] + \\ d_1 \left[ \sum m_j R_j \omega^2 \sin(\alpha_i - \alpha_j) \right] \end{array} \right\} \quad (29)$$

Teniendo en cuenta que:  $A_c = A_c(Me)$ ,  $A_s = A_s(Me)$  son las componentes de  $x_2(t)$  y  $\theta_2(t)$  con respecto al rotor y  $A_{cxj} = A_{cx}(\alpha_j)$ ,  $A_{s\theta j} = A_{s\theta}(\alpha_j)$  con respecto a las bolas; al manipular estos coeficientes o amplitudes de vibración, se generan coeficientes de influencia mutua entre el rotor y el disco de corrección de vibración denominados  $k_1$  y  $k_2$ . Estos coeficientes de influencia se pueden percibir como el efecto que se provocan mutuamente ambos discos inercialmente por la distancia entre ellos  $L_2$ . Se ha visto que las amplitudes causadas por el desbalance ( $Me$ ) se determinaron por  $A_{cx}$ ,  $A_{sx}$ ,  $A_{cy}$ ,  $A_{sy}$ ; ahora estos mismos coeficientes se obtienen por el efecto de una bola y se pueden determinar apoyándose en el sistema de ecuaciones siguiente.

$$(K_x - M\omega^2)A_{cx} + c_x\omega A_{sx} + K_{x\phi}A_{c\phi} + c_{x\phi}\omega A_{s\phi} = k_1 mR\omega^2 \quad (30)$$

$$-c_x\omega A_{cx} + (K_x - M\omega^2)A_{sx} - c_{x\phi}\omega A_{c\phi} + K_{x\phi}A_{s\phi} = 0 \quad (31)$$

$$(K_y - M\omega^2)A_{cy} + c_y\omega A_{sy} + K_{y\phi}A_{c\phi} + c_{y\phi}\omega A_{s\phi} = 0 \quad (32)$$

$$-c_y\omega A_{cy} + (K_y - M\omega^2)A_{sy} - c_{y\phi}\omega A_{s\phi} = k_1 mR\omega^2 \quad (33)$$

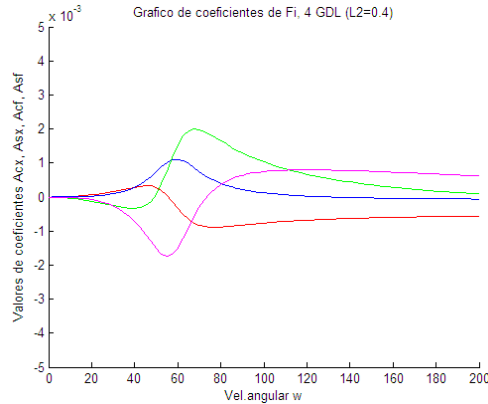
$$K_{y\phi}A_{cy} + c_{y\phi}\omega A_{sy} + (K_\phi - I\omega^2)A_{s\phi} + J\omega^2 A_{c\theta} = 0 \quad (34)$$

$$-c_{y\phi}\omega A_{cy} + K_{y\phi}A_{sy} - c_\phi A_{c\phi}A_{c\phi} + (K_\phi - I\omega^2)A_{s\phi} + J\omega^2 A_{c\theta} = k_2 mR\omega^2 \quad (35)$$

$$K_{x\theta}A_{cx} + c_{x\theta}\omega A_{sx} + J\omega^2 A_{s\phi} + (K_\theta - I\omega^2)A_{c\theta} + c_\theta\omega A_{s\theta} = -k_2 mR\omega^2 \quad (36)$$

$$-c_{x\theta}\omega A_{cx} + K_{x\theta}A_{sx} - J\omega^2 A_{c\phi} - c_\theta\omega A_{c\theta} + (K_\theta - I\omega^2)A_{s\theta} = 0 \quad (37)$$

Haciendo la simulación en un software matemático:



**Fig. 11.** Comportamiento de las amplitudes del sistema de ecuaciones (31) a (37)

Como resultado de la simulación de los coeficientes del sistema de ecuaciones anterior puede verse que se genera una condición de estabilidad aproximadamente después de que la velocidad angular alcanza una magnitud de 100 rad/s, esto indica que las amplitudes de vibración originadas por las fuerzas de vibración de la bola se vuelven estables y mínimas después de los 100 rad/s.

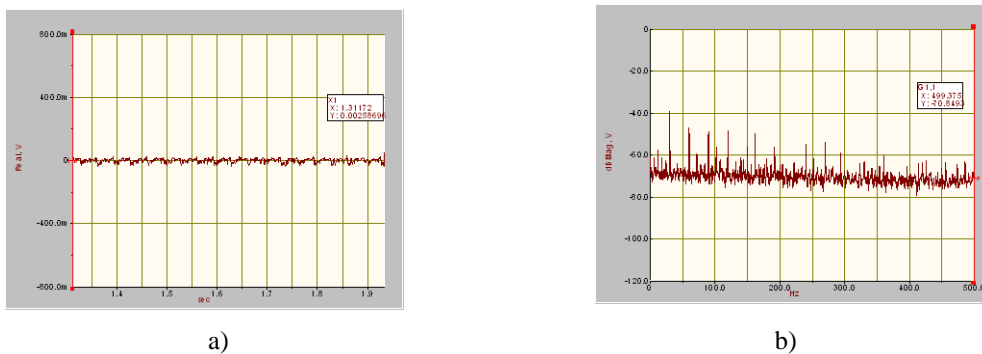
### 5 Análisis Experimental del Modelo

Se realizó un prototipo experimental para poner en práctica lo teóricamente encontrado o mejor dicho simulado por medio de computadores, algunos resultados se muestran a continuación:

Teniendo presente los siguientes datos o dimensiones del banco experimental, donde:  $L_1 = 0.15$  m,  $L_2 = 0.225$  m,  $L_3 = 0.17$  m,  $M_{rotor} = 6.70$  kg,  $Diam_{rotor} = 0.23$  m.  $m_{bola} = 0.009$  kg,  $Diam_{bola} = 0.0125$  m,  $\omega = 1800$  rpm.

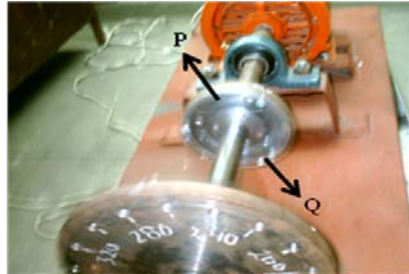
Se hicieron varias corridas en diferentes condiciones de trabajo, la primera fue con un rotor bien balanceado donde el desbalance residual fue de manera fasorial: 0.01 milésimas de pulgada [0.000254 mm] en una orientación de 40°, esto quiere decir que el vector de vibración remanente en el banco bajo estas características provocan una magnitud de 0.0001 pulgadas [0.000254 mm] en la dirección o fase de 40° con respecto a un sistema de orientación generalizado. Esta vibración de acuerdo a características de masa y rigidez es pequeña (de acuerdo a una tabla de severidad donde marca una norma de 0.001 pulgadas) por lo que se asume que en este momento el sistema eje-rotor se encuentra balanceado.

A continuación se expresa gráficamente la vibración detectada por medio de software e instrumentación de medición en las condiciones del sistema sin desbalance estático  $Q_x$ :



**Fig. 12.** En estos gráficos se puede ver la amplitud de la vibración y su frecuencia. En la figura a) la amplitud de vibración es de 0.01 mils-plg. b) Véase la frecuencia de 30 Hz. (1800 rpm), en ésta se nota el pico más alto y significa desbalance

A continuación se provoca un desbalance “conocido” y pertinentemente proporcional al peso de las bolas para que estas sean capaces de obtener un auto-balanceo, esto de acuerdo a análisis básicos de vibraciones mecánicas en donde se manipularon varias corridas y se encontraron los pesos óptimos. El peso de prueba utilizado para esto es un tornillo de 16.8 g a una fase de  $120^\circ$ , realizando una medición por el equipo utilizado (IRD 880) se obtiene una vibración resultante: vector de magnitud promedio de 5.7 milésimas de pulgada [0.144 mm] a una fase resultante de  $100^\circ$ .



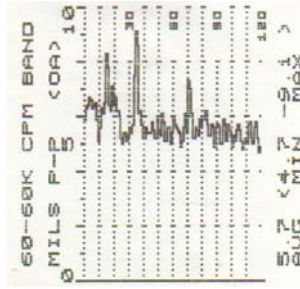
**Fig. 13.** Imagen del comportamiento de las bolas, cuando se le aplica un desbalance conocido. Las bolas se colocan aproximadamente a 2 y 4 radianes

Se puede ver en la figura 13 que después de haber aplicado una masa de desbalance con el tornillo de 16.8 gramos, las bolas se colocan en una posición de aproximadamente  $\alpha_{1f} = 2$  rad y  $\alpha_{2f} = 4$  rad con respecto a Q, logrando con esto una resultante que se denota en la figura 13 como P, equilibrando al desbalance estático Q, la foto tiene algunos destellos porque el sistema está girando a 1800 rpm (30 Hz) y porque el plástico (mica) que recubre o que contiene a las bolas o esferas desprende brillo al momento del flash.

Como se dijo anteriormente, el desbalance estático inicial Q se encuentra a  $100^\circ$  aproximadamente, que en la figura 13 no se alcanza a ver, pero se puede estimar que la fuerza P se encuentra a  $280^\circ$  aproximadamente y por lo tanto restando  $180^\circ$  (su diagonal opuesta) se encontraría la fase de  $100^\circ$  que es donde se encuentra el desbalance original de 6 milésimas de pulgada. Se hicieron las mediciones pertinentes después de que el sistema se le dio marcha, esto es; después de 3 o 4 segundos y la vibración medida fue de 0.4 milésimas de pulgada [0.01016 mm] en una chumacera y de 0.3 milésimas de pulgada [0.0076 mm] en la segunda chumacera, medida que está dentro de los márgenes, visto desde la carta de severidad que se maneja en vibraciones mecánicas.

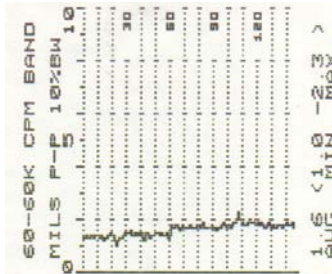
## 6 Resultados

Para el caso del modelo en cuestión, se puede ver que la zona crítica anda alrededor de los 40 rad/s; velocidades inferiores a esto provocarían zonas de inestabilidad o de altas vibraciones (poca absorción de vibración) mientras que en velocidades superiores a las 40 rad/s se lograría una absorción de vibración de casi el 80%. Estos resultados se basan en modelos y simulaciones por computadora, pero téngase presente que el prototipo experimental de este modelo fue construido y que los resultados obtenidos de este prototipo fueron bastante similares a las simulaciones realizadas, a continuación se muestra una corrida experimental y verifíquese la reducción de vibración residual. En la figura 14 se puede ver un diagnóstico del desbalance provocado y una impresión gráfica del desplazamiento pico a pico que hace el equipo IRD 880 de Mechanalysis, donde arroja un resultado de un promedio de 5.7 milésimas de pulgada aproximadamente, es decir; 0.144 mm.



**Fig. 14.** Gráfico del desplazamiento pico a pico del rotor en desbalance

Observe que el pico más alto está aproximadamente en 30 ciclos por segundo, equivalente a 1800 rpm, que es la velocidad del rotor acoplado; comprobando con esto que la falla típica en este modelo es de 1 X RPM, condición de desequilibrio o desbalance. Al aplicar o colocar las bolas en su disco contenedor se disminuye de manera considerable la amplitud de vibración, esto puede verse en la siguiente figura 15.



**Fig.15.** Gráfico del desplazamiento pico a pico del rotor balanceado automáticamente por las esferas

En la figura anterior 15 se puede verificar cómo disminuye la amplitud de la vibración de, en promedio; 5.7 milésimas de pulgada (0.144 milímetros) a 1.6 milésimas de pulgada (0.035 milímetros), tal medición se tomó en una situación de un 10% de filtrado de la señal, esto para que se aislara más finamente la señal demandante. La reducción fue del 78.4% aproximadamente.

## 7 Conclusiones

En resumen, de este trabajo de Tesis se ha podido demostrar que el sistema de auto-balance es factible. Cuando el rotor y el sistema de auto-balance están en la misma posición del eje, la corrección del desbalance es completa, cuando el rotor y el sistema de auto-balance están colocados a cierta distancia (por ejemplo  $L_2$  y/o  $L_3$ ), la corrección del desbalance no es completa y a medida que crecen estas distancias, aumenta la vibración residual en el sistema. Adicional a esta falta de balanceo se generan fuerzas vibratorias que provocan inestabilidad en las bolas en sus posiciones finales dentro del disco y tienden a moverse indefinidamente.

Es necesario mencionar que al análisis de este fenómeno le falta un buen camino por recorrer, en donde se puedan lograr simulaciones con otros programas más potentes y realizar comparaciones entre ellos mismos. También se necesitan diseñar prototipos más finos, en los cuales por ejemplo; la masa del eje ó la masa de los discos (en donde se colocan las bolas) sean realmente despreciables. Contar con equipos de medición más finos y confiables. Esto sin duda representa un reto importante en el que se continuará trabajando, buscando en todo momento avances en el desarrollo tecnológico y promover los estudios de estudiantes de maestría o doctorado, todo esto bajo el patrocinio o apoyo de algún organismo, para su propia manutención y equipamiento.

## 8 Referencias

1. **Adolfsson, J. (1997).** *A study of Stability in Autobalancing Systems using multiple Correction Masses* (Technical Report 1997:3). Stockholm, Sweden: Royal Institute of Technology, Department of Mechanics.
2. **Balachandran, B. & Magrab, E. B. (2006).** *Vibraciones*. México: Thomson.
3. **Chung, J. & Ro, D. S. (1999).** Dynamic analysis of an automatic dynamic balancer for rotating mechanisms. *Journal of Sound and Vibration*, 228(5), 1035-1056.
4. **Chung, J. & Jang, I. (2003).** Dynamic response and stability analysis of an automatic ball balancer for a flexible rotor. *Journal of Sound and Vibration*, 259, 31-43.
5. **Crandall, S. H., Karnopp, D.C., Kurtz, E. F. & Pridmore-Brown, D. C. (1982).** *Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems* (2a. ed.). Malabar, Fla. Krieger.
6. **Gawlak, G. & Majewski, T. (1991).** Dynamic of device for automatic balancing of the rotors systems, *Archive of Mechanical Engineering*, 38(3), 185-199.
7. **Hwang, C. H. & Chung, J. (1999).** Dynamic analysis of an automatic ball balancer with double races. *JSME International Journal*, 42, 265-272.
8. **Majewski, T. (1987).** Synchronous vibration eliminator for an object having one degree of freedom, *Journal of sound and vibration*, 112, 401-413.
9. **Majewski, T. (1988).** Position error occurrence in self balancers used in rigid rotors of rotating machinery, *Mechanism and machine theory*, 23(1), 71-78.
10. **Majewski, T. (1994).** *Synchronous elimination of vibration in the plane* (Mechanics. 155). Warsaw: Warsaw University of Technology.
11. **Majewski, T. & Domagalski, R. (1997).** Selection of system parameters for achieving appropriate balance class, *Conference on Mechatronics 1997*, Warsaw, Poland, 523-528.
12. **Majewski, T. & Switek, W. (1999).** Optimization of the System for Automatic Compensating of Dynamical Forces. In C. A. Brebbia & S. Hernandez (Eds.), *Computer Aided Design of Structures* (375-384). Southampton: WitPress.
13. **Majewski, T. (2000).** Synchronous Elimination of Vibrations en the plane. Part 1: Analysis of Ocurrence of Synchronous Movements. *Journal of Sound and Vibration*, 232(2), 555-572.
14. **Majewski, T. (2000b).** Synchronous elimination of vibration in the plane. Part 2: Method efficiency and its stability. *Journal of Sound and vibration*, 232(3), 571-584.
15. **Majewski, T & Meraz, M-A (2006).** Sistema de Autobalance en dos Planos para Rotores Flexibles. *Congreso Internacional de Ingeniería Mecánica, SOMIM 2006*, Acapulco, Mexico, 7-13.
16. **Majewski, T., Domagalski, R. & Meraz Melo, M. (2006).** Dynamic Compensation of Dynamical Forces in two Planes for the Rigid Rotor. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 45 (2), 685-701.
17. **Meraz, M-A. & Majewski, T. (2004).** Automatic Compensating of Dynamical Forces for Rotating Systems. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 3(2), 437-442.
18. **Meraz, M-A (2005).** Automatic Compensating of Dynamical Forces for Rotating Mechanisms. *Revista Facultad de Ingeniería*, Chile, 13, 171-179.
19. **Rajalingham, C. & Rakheja, S. (1998).** Whirl suppression in hand-held power tool rotors using guided rolling balancers. *Journal of Sound and Vibration*, 217, 453-466.



**Marco Antonio Meraz Melo**, Ingeniero Mecánico egresado del Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, Tamaulipas. Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica egresado del Instituto Tecnológico de Veracruz. Es Doctor en Ingeniería en Procesos de Manufactura egresado del Centro de Ingeniería y Desarrollo Industrial (CIDESI) en la ciudad de Santiago de Querétaro, Qro. Realizó una Estancia en la Ecole d'Ingénieurs en Genie des Systémes Industriels en La Rochelle, Francia. Ha dirigido 11 Tesis de Licenciatura y 5 Tesis de Maestría. Ha participado en Congresos Nacionales e Internacionales y cuenta con Publicaciones Indizadas. Actualmente es miembro de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica (SOMIM), es también miembro de la IEEE y es Candidato a Investigador en el Sistema Nacional de Investigadores (SNI, 2010-2012).



**Tadeusz Majewski Szymiec**, MSc. Eng., PhD., DSc. Profesor de la Universidad de las Américas-Puebla, 72820 Puebla, AP 258, Phone: (222) 229 26 73, [tadeusz.majewski@udlap.mx](mailto:tadeusz.majewski@udlap.mx), 1965 -Maestría (Mech.Eng.) Warsaw University of Technology, Poland 1973 - Doctorado (Ph.D.) Warsaw University of Technology, Poland, 1996 – D.Sc. (Doctor Habilitatis) Poznan University of Technology, Poland, 1965 – 1997, Asistente profesor, profesor en Warsaw University of Technology, Poland, Desde 1997 profesor titular en la Universidad de las Américas-Puebla. Ha publicado 5 libros, 32 artículos y 100 ponencias en los congresos nacionales e internacionales, 5 patentes, Ha participado en 25 proyectos de investigación, director 35 tesis de licenciatura, maestría y doctorales.



**Germán Ardul Muñoz Hernández**, Ingeniero Industrial en Electrónica por el Instituto Tecnológico de Veracruz, Maestro en Ciencias en Electrónica por el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (I.N.A.O.E.) y Doctor en Sistemas de Control por la Universidad de Bangor, Gales Reino Unido. Realizó una estancia Posdoctoral en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. En el área académica ha colaborado en diferentes instituciones, actualmente es profesor-investigador en el Instituto Tecnológico de Puebla. Ha dirigido 26 tesis de licenciatura y 8 tesis de Maestría. Ha realizado estancias de Investigación, en el Instituto de Investigaciones Eléctricas (I.I.E.), la Universidad de Carolina del Sur Campus Columbia, la Universidad de Michigan en Ann Arbor y en el CERN en Ginebra Suiza. Su área de investigación es la instrumentación, control e identificación de procesos. Ha participado en congresos nacionales e internacionales y cuenta con publicaciones en revistas indizadas.