



Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I

Semiotic representation registers of the exponential function concept. Part I

María G. Castro Rodríguez^{a*}, María D. González Quezada^{b**}, Sergio Flores García^{c**}, Osiel Ramírez Sandoval^{d**}, María D. Cruz Quiñones^{e**}, María C. Fuentes Morales^{f*}

*Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez,

**Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

RESUMEN

El concepto de función es un objeto matemático fundamental en el proceso de abstracción, en particular, en la función exponencial, la cual es preponderante para el aprendizaje de varios procesos físicos y sociales. Esta función, es parte de los programas de matemáticas desde el inicio de la instrucción escolar hasta el nivel superior, donde la extensión de los mismos, ha limitado su tiempo de estudio. Aunado a este problema, el sistema tradicional de enseñanza sólo incluye algunos cambios de representación, que de acuerdo con *La teoría de registros de representación semiótica* (Duval, 1993) no son suficientes para que el estudiante adquiera un entendimiento significativo de esta función. En este artículo se muestra el efecto de la instrucción recibida mediante el coeficiente ganancia normalizada de Hake (1998) a través de una secuencia didáctica. Esta secuencia se fundamenta en los diversos cambios de registros de representación semiótica del concepto de función. Se muestran los efectos de entendimiento de dos grupos, el experimental y el de control. Los resultados indican que el grupo experimental obtuvo una mayor ganancia, y accedió a niveles de entendimiento de Hitt (1998) más altos en comparación con el grupo de control. Además, se obtuvo una correlación de 0.5 entre estos dos índices.

ABSTRACT

The concept of function is a fundamental mathematical object in the abstraction process, especially in the exponential function, which is essential to the learning of various physical and social processes. This function is part of mathematics curricula from primary up to high school. The extension of these programs in high-level education restricts the necessary time to cover this content. In addition, traditional educational systems only include some changes in mathematical representations, which according to *Semiotics Representation Theory* (Duval, 1993) are not enough for the students to develop a functional understanding of this function. In this article we present the effect of the instruction through Hake's average normalized gain (Hake, 1997), based on a didactic sequence and its relation with Hitt's (1998) understanding level. Results show the experimental group developed higher gain and understanding levels compared to the control group. In addition, a 0.5 correlation was found between these two indicators.



Recibido: 20 de febrero de 2017;
aceptado: 24 de mayo de 2017



Palabras clave:
función exponencial, representación matemática, ganancia de Hake, entendimiento de los estudiantes, nivel de entendimiento de Hitt.



Keywords:
exponential function, mathematical representations, Hake's average normalized gain, students' understanding, Hitt's understanding level.



Se autoriza la reproducción total o parcial de los textos aquí publicados siempre y cuando se cite la fuente completa y la dirección electrónica de la publicación. CC-BY-NC-ND

INTRODUCCIÓN

La matemática forma parte de nuestra vida desde que entramos al sistema educativo: preescolar, primaria, secundaria, preparatoria. En estos trece años, los conceptos se abordan varias veces aumentando, paulatinamente, el nivel de complejidad. El objetivo es obtener un entendimiento cada vez más profundo y consolidado. En el caso de la función exponencial, un primer contacto con el concepto se presenta en el segundo año de secundaria, con actividades como el cálculo de productos y cocientes de potencias enteras positivas de la misma base y potencias de una potencia. Además, se estudia el significado de elevar un número natural a una potencia de exponente negativo (Secretaría de Educación Pública, [SEP], 2013). Después, en cuarto semestre del nivel medio superior, se trabaja con distintas representaciones de la función exponencial. Por ejemplo, se parte de expresiones algebraicas para obtener tablas de valores y realizar representaciones gráficas, modelación y resolución de problemas (SEP, 2014). Sin embargo, ¿por qué después de tanto tiempo de contacto con la matemática, algunos estudiantes de las carreras de ingeniería no muestran evidencia de un aprendizaje significativo? Por ejemplo, en el Sistema de Institutos Tecnológicos, en las carreras de ingeniería, se tiene un índice de aprobación inferior al 60% (Amado, García, Brito, Sánchez, y Sagaste (2014).

En la búsqueda de respuestas interviene la Matemática Educativa, como una disciplina que está relacionada con la matemática escolar, proponiendo estrategias para disminuir los problemas que se presentan en su enseñanza y aprendizaje. Actualmente, el aprendizaje se concibe como una actividad que corresponde al estudiante, y la enseñanza, la actividad del instructor, entendiéndose que éste debe conducir ambas diseñando estrategias que propicien el aprendizaje mediante la actividad intelectual de orden superior en el estudiante (Nieto, Viramontes y López, 2009).

Investigaciones realizadas en el campo de la Matemática Educativa (Sureda y Otero, 2013) muestran que hay un obstáculo para el entendimiento del concepto “función exponencial”, siendo la didáctica empleada para su aprendizaje la causa de su incompreensión. Solo se proporciona al alumno una serie de pasos o procedimientos que permiten resolver problemas estandarizados, después en ese curso o en posteriores, el docente ya

no usa esta función como simple herramienta de cálculo numérico, sino que necesita que el alumno se apoye de la función exponencial con el objetivo de resolver problemas.

Sureda (2012) abordó el problema de la enseñanza de la función exponencial con *sentido* en la escuela secundaria. En la investigación se estudió la función exponencial a partir de una situación del mundo real. Se diseñó un dispositivo AEI (actividad de estudio e investigación). Se implementó la actividad en dos cursos de cuarto año. Se observó que la mayor parte de los alumnos aceptaron la relevancia del error, y la posibilidad de pensar por sí solos para un posible entendimiento de la función exponencial. Con base en estos argumentos, podemos señalar que es necesario desarrollar nuevas estrategias didácticas para mejorar el aprendizaje de esta función. De acuerdo con Sureda y Otero “si se está interesado en la enseñanza de conceptos complejos, como el de función exponencial, se debe tener en cuenta que el diseño de las situaciones tendrá que involucrar más de un sistema de representación” (2013, p. 95).

En este artículo, se muestran resultados de carácter cuantitativo a través de indicadores del desarrollo en la ganancia de Hake (1998), y el nivel de entendimiento de Hitt (1998) por parte de estudiantes de Cálculo Diferencial. Esto con base en una secuencia didáctica fundamentada en los diversos cambios de registros de representación semiótica. Se pretende explorar una posible relación entre la versatilidad entre los diversos cambios de representación semiótica del concepto de función exponencial, no solo con la ganancia, sino también con base en el nivel de entendimiento de los estudiantes. Además, se mostrarán resultados de la comparación entre los grupos experimental y control, en relación con la ganancia obtenida y los niveles de entendimiento desarrollados.

MARCO TEÓRICO

El fundamento de esta investigación es la Teoría de registros de representación semiótica, propuesta por Duval (1993). En la teoría se establece que el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento

matemático es esencial. No existen otras maneras de tener acceso a los objetos matemáticos, sino a través de la producción de representaciones semióticas, y que cada registro de representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que él representa. Por tal motivo, la enseñanza-aprendizaje de las funciones no se debe limitar al trabajo en uno solo de estos registros, sino que se debe incluir la capacidad de *traducir* la información de una representación a otra (Janvier, 1987; Duval, 2006).

En la teoría de registros de representación semiótica, a la actividad ligada a la producción de una representación se le llama *semiosis*, mientras que a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos se le denota como *noesis*. Un *registro de representación* debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis. Esto es, la formación de una representación identificable, tratamiento y conversión. La primera actividad está relacionada con la expresión de una representación mental: “las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma” (Duval, 1999, p. 5). Mientras que, las otras dos actividades están relacionadas con la transformación de las representaciones en otras representaciones. El tratamiento es una transformación interna, es decir, es la transformación de la representación en el mismo registro en el que está dada, por otro lado, la conversión es una transformación externa, o sea, es la representación en un registro distinto al registro en el que fue dada.

Comúnmente, las actividades que se trabajan en el aula para realizar conversiones, se caracterizan por iniciar con la representación algebraica a partir de la cual, se le pide al estudiante la conversión al registro tabular; ya generado el registro tabular, se solicita la conversión al registro gráfico. En clase también, es común practicar la conversión del registro algebraico al gráfico. Para lograr esta última actividad de conversión, se estudian los trazos característicos de las funciones y se grafican nuevas funciones a partir de ellas, utilizando rotaciones, traslaciones horizontales y verticales.

“En las observaciones que se han podido hacer en el aprendizaje de las matemáticas: se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos en los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible” (Duval, 1999, p. 15) y que cuando se tiene éxito al realizar

actividades de conversión, la aplicación de las reglas tiene un sentido único, es decir, si un estudiante tiene éxito al realizar una conversión de un registro a otro, no implica que el estudiante tendrá éxito en realizar la conversión inversa. Por tales motivos, es necesario explorar las situaciones de conversión para todos los pasajes posibles.

La coordinación de registros de representación requiere que la conversión pueda ser fácilmente efectuada para todos sus diferentes cambios de registro. Para favorecer esta coordinación, parece esencial proponer una tarea que conduzca a explorar sistemáticamente las variantes posibles de una representación en un registro y prever, u observar, las variaciones concomitantes de las representaciones en el otro registro (Duval, 1992). Existe una gran variedad de situaciones a tratar, a fin de favorecer la coordinación entre los diferentes registros. La enseñanza no se puede restringir a la presentación de algunos ejemplos de conversión.

El objetivo general de esta investigación es *explorar los efectos cognitivos de los diversos cambios de registros de representación del concepto de función exponencial en los estudiantes de Cálculo Diferencial*. Y con el propósito de atender a las sugerencias de los investigadores en Matemática Educativa (Waldegg, 1998) y los problemas de aprendizaje relacionados con la función exponencial, se presentan las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué impacto genera en el estudiante una instrucción que privilegia el uso de distintos registros de representación semiótica?
- ¿Existe alguna relación entre los niveles de entendimiento conceptual que define Hake (1998) y los niveles de comprensión de Hitt (1998)?

METODOLOGÍA

Para dar respuesta a las preguntas de investigación, fue necesario el diseño de un instrumento de evaluación y una secuencia didáctica que involucrara el uso y conversión de distintos registros de representación semiótica. La implementación se llevó a cabo en el semestre enero-junio de 2015 en el Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez (ITCJ) en dos grupos de estudiantes de ingeniería inscritos en la materia de Cálculo Diferencial. Para el análisis de resultados, se utilizaron la ganancia normalizada y

niveles de entendimiento de Hake (1998) y los niveles de comprensión de Hitt (1998).

Instrumento de evaluación y secuencia didáctica

Se diseñó un instrumento de evaluación y una secuencia didáctica para la enseñanza- aprendizaje de la función exponencial $y = b^x$ y su transformación $y = c(b)^{x/a}$. Ambas con fundamento en la Teoría de registros de representación semiótica de Duval (1993). Este instrumento de evaluación contiene siete problemas con varias preguntas en cada uno de ellos, dando un total de treinta y un reactivos. Los reactivos de la evaluación están diseñados en los tipos: opción múltiple, falso, verdadero, respuesta breve y correspondencia. El instrumento de evaluación se diseñó con dos fines: como evaluación de entrada o diagnóstica y como evaluación de salida. Con la evaluación diagnóstica se determinó el conocimiento previo del estudiante relacionado con el uso de diferentes registros de representación semiótica (escrito, pictórico, tabular, gráfica y algebraica) además, la conversión entre registros del objeto función exponencial. La evaluación de salida permitió medir el progreso que tuvo el estudiante al finalizar la instrucción propuesta en la secuencia didáctica (Castro y González, 2015).

La secuencia didáctica se conformó por 6 secciones. Tres actividades donde se estudian los elementos teóricos referentes a la función exponencial mediante el uso y conversiones entre los registros escrito, gráfico, tabular y algebraico. Además, dos prácticas en las que se usan los elementos teóricos estudiados en las actividades para representar en los registros gráfico, tabular y algebraico problemas físicos. También, una tabla registro-contexto (Chávez, Flores y Alfaro, 2013) en la que, mediante conversiones entre los registros escrito, pictórico, gráfico, tabular y algebraico, se resuelven problemas que van de lo concreto y manipulable a lo abstracto.

Implementación del instrumento de evaluación

Antes y después del estudio de la función exponencial, se aplicó el instrumento de evaluación en dos grupos de ingeniería de Cálculo Diferencial del RTCJ, llamados control y experimental. La instrucción del grupo control se fundamentó en una estrategia de corte tradicional presentada por el libro de texto base, *Cálculo Diferencial*,

Matemáticas I, de Larson, Hostetler y Edwards (2009). En el grupo experimental se implementó la secuencia didáctica diseñada. Al momento de iniciar con la investigación en los grupos experimental y control, ya se había realizado la evaluación de la Unidad I de Desigualdades. La Unidad II correspondiente a Funciones estaba a punto de llegar a su fin. Se reprogramó el temario para estudiar la función exponencial al final de la unidad. Así, los temas estudiados en clase habían sido: función, funciones lineales, funciones de potencia, rotación y traslación de funciones, polinomios, funciones trigonométricas y funciones inversas. En ambos grupos se utilizaron previamente los registros de representación semiótica algebraica, tabular y gráfica, además de las conversiones clásicas más comunes: del registro algebraico al registro tabular, del registro tabular al registro gráfico y del registro algebraico al registro gráfico.

La aplicación de los instrumentos de evaluación y la secuencia didáctica se llevaron a cabo en la materia de Cálculo Diferencial. Se inició la investigación aplicando a los estudiantes de dos grupos la evaluación de entrada, la cual fue contestada por escrito de forma individual en un lapso de 40 minutos. La evaluación fue realizada por 20 estudiantes del grupo experimental y 29 del grupo control. En la clase siguiente a la aplicación de la evaluación de entrada, se llevaron a cabo las sesiones para el estudio de la función exponencial. En el grupo control, la estrategia de enseñanza siguió la propuesta del libro de texto base. Los temas estudiados en este grupo durante la clase referentes a la función exponencial fueron:

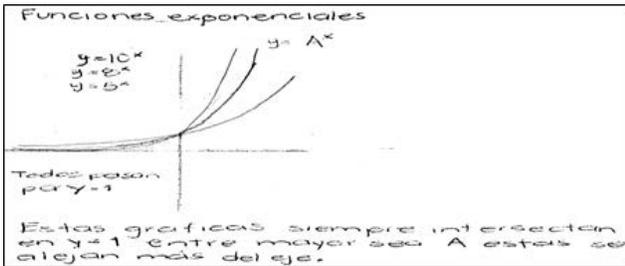
- Definición función exponencial forma $y = b^x$ (figura 1).
- Características de la función exponencial: creciente, decreciente, concavidad, (figura 2).
- Dominio y rango.
- Conversiones: registro algebraico al tabular, tabular al gráfico, algebraico al gráfico, (figuras 3 y 4).

Figura 1. Definición de función exponencial dada al grupo control

Función Exponencial
 Es una función de la forma $f(x) = a^x$ con $a > 0$, $a \neq 1$, su dominio está formada por todos los números reales y su rango por todos los reales positivo, si $a = 1$, la función exponencial es una función constante, si $a > 1$ la función es creciente (sube de izquierda a derecha) y si $0 < a < 1$, entonces la función es decreciente (baja de izquierda a derecha).
 Potencia: x^2
 Exponencial: 2^x

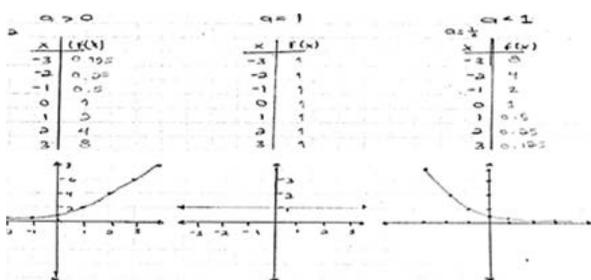
Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

Figura 2. Características gráficas de la función exponencial



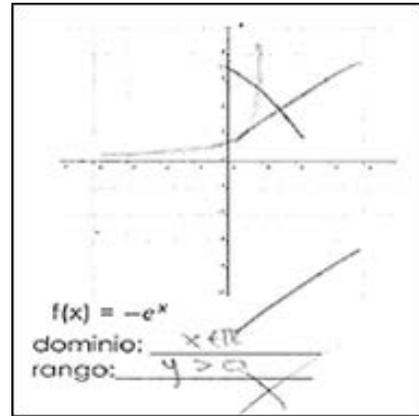
Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

Figura 3. Conversiones clásicas: fórmula-tabla-gráfica



Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

Figura 4. Conversiones clásicas: fórmula-gráfica



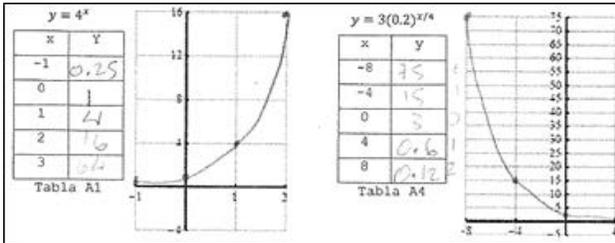
Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

La secuencia didáctica se implementó en el grupo experimental. Durante el desarrollo de las actividades, el instructor actuó como moderador en las discusiones de equipo, y auxilió a los alumnos individualmente. Al finalizar cada una de las tres actividades se realizó un debate con el grupo completo para resumir los conceptos estudiados y con ello confirmar el entendimiento de los conceptos de la función exponencial. Las actividades 1 y 2 se complementaron con una práctica y tabla registro-contexto. La actividad 3, se complementó solo con la tabla registro-contexto. Los temas estudiados en el grupo experimental, en las tres actividades, las dos prácticas y los cuatro problemas de la tabla registro-contexto que forman la secuencia didáctica fueron:

- Registros de representación semiótica y conversiones clásicas: registro algebraico al tabular, tabular al gráfico de la función exponencial $y = b^x$ y su transformación $y = c(b)^{x/a}$ (figura 5).
- Características de la función exponencial: creciente, decreciente y concavidad (figura 6).
- Discriminación de unidades significantes para realizar conversiones no clásicas: algebraico al escrito, gráfico al numérico, numérico al algebraico (figuras 7, 8 y 9).
- Transformación a la forma $y = c(1 + r)^x$ (figura 10).
- Solución a problemas que involucran la función exponencial utilizando conversiones entre registros. Los problemas se incluyen en las prácticas y

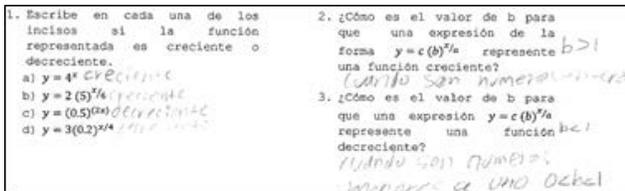
tabla de registro-contexto como complemento a las actividades (Figura 11).

Figura 5. Ejercicio de la actividad 1 relacionado con conversiones clásicas



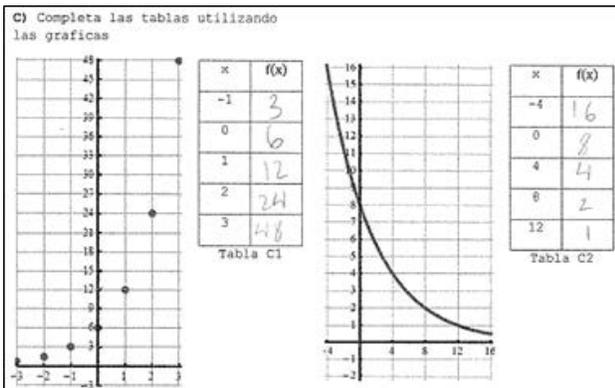
Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

Figura 6. Ejercicio de la actividad 1 para describir crecimiento, decrecimiento y concavidad de las funciones exponenciales



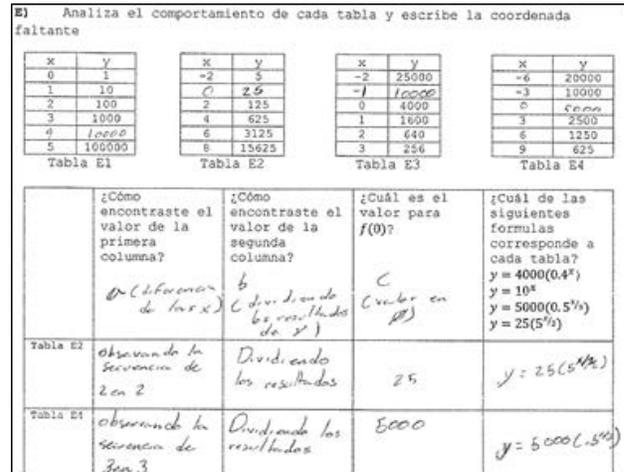
Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

Figura 7. Ejercicio de la actividad 1 para trabajar conversión del registro gráfico al tabular propuesto en la secuencia didáctica



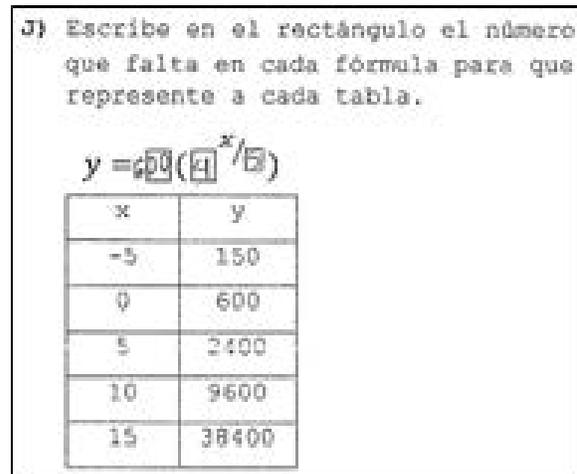
Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

Figura 8. Ejercicio de la actividad 2 para discriminación de unidades significantes del registro numérico para establecer correspondencia al registro algebraico



Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

Figura 9. Ejercicio de la actividad 2 para trabajar conversión del registro numérico al algebraico



Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

Figura 10. Ejercicio de la actividad 3 para trabajar con la función exponencial de la forma

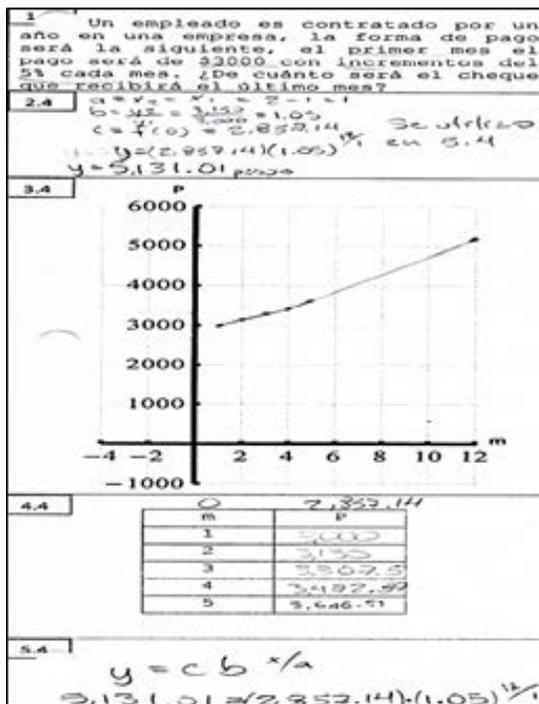
$$y = c(1 + r)^x$$

Respuestas aumentando al 40%		Respuestas aumentando al 70%	
x	Y	x	Y
0	50	0	100
1	70	1	170
2	98	2	289
3	137.2	3	491.2
4	192.08	4	835.21

$y = 50(1.4)^x/1$
 $y = 100(1.7)^x/1$

Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

Figura 11. Ejercicio de la tabla registro-contexto



Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

Después del estudio de la función exponencial, se aplicó la evaluación de salida, la cual se contestó individualmente por 21 alumnos del grupo experimental y 19 estudiantes del grupo control en un lapso de 40 minutos. En el grupo experimental, la evaluación se aplicó un día después de concluido el estudio de función exponencial. Para el grupo control se aplicó cuatro días después de

haber estudiado el concepto.

Descripción de procedimientos y análisis de resultados de las evaluaciones de entrada y salida de los estudiantes de ambos grupos

A continuación se muestra el impacto de la instrucción recibida. Además, los registros y conversiones utilizados con mayor éxito por los estudiantes, y la clasificación de los estudiantes en alguno de los niveles de entendimiento y comprensión propuestos por Hake (1998) y Hitt (1998) respectivamente.

Ganancia normalizada y niveles de entendimiento conceptual de Hake

Los resultados de las evaluaciones de entrada y salida de los estudiantes se reportaron individualmente con un indicador llamado ganancia normalizada (Hake, 1998). El coeficiente de ganancia normalizada permite medir el progreso de un estudiante después de una instrucción sin importar que haya estudiantes que inicien un curso mejor preparados que otros. La ganancia normalizada (g) se define como: “razón del aumento entre una prueba preliminar y una prueba final respecto del máximo aumento posible” (Hake, 1998, p. 65).

$$g = \frac{\text{Aciertos examen salida} - \text{Aciertos examen entrada}}{\text{Reactivos del examen} - \text{Aciertos examen entrada}}$$

Con la fórmula se tiene un número para cada estudiante que puede tomar valores entre 0 y 1. Si se alcanza el valor 1, indica que el estudiante alcanzó el máximo aprendizaje posible, mientras que un valor 0 indica que el estudiante obtuvo el mismo puntaje en las pruebas de entrada y salida.

Hake concluye en sus investigaciones, que para grupos de estudiantes en los que la instrucción aplicada es del tipo tradicional, la ganancia toma valores menores al 0.3. Para los casos de una instrucción de tipo muy activa con estudiantes trabajando en pares, con tutorías presentes e interactuando docente-estudiante, la ganancia es mayor al 0.3. Por lo que se deduce que una ganancia normalizada, siempre mayor a 0.3 se identifica con una enseñanza que promueve el aprendizaje activo (tabla 1).

Los resultados de ganancia mostrados en este reporte,

se obtuvieron con base en la extensión que Alarcón y De la Garza (2009) realizaron al modelo definido por Hake. Esto para tomar en cuenta los casos que presentan menor puntaje en el examen de salida que en el de entrada. Así, se tiene un coeficiente para cada estudiante que puede tomar valores entre -1 y 0. La obtención de un -1 indica que el estudiante ha fallado en la totalidad de las preguntas en el examen de salida:

$$Ganancia = \frac{Aciertos \ examen \ salida - Aciertos \ examen \ entrada}{Aciertos \ examen \ entrada}$$

Tabla 1. Niveles de entendimiento de Hake

Ganancia normalizada	Rango
Alta	$g \geq 0.7$
Media	$g \in [0.3, 0.7)$
Baja	$g < 0.3$

Fuente: elaboración basada en Hake, 1998.

Niveles de comprensión de Hitt

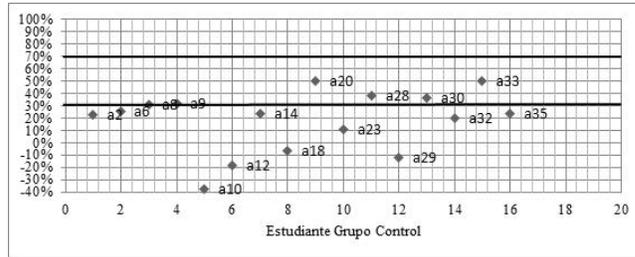
Hitt (1998) propone cinco posibles niveles de comprensión de un concepto. Dichos niveles están en función del uso de los distintos registros de representación, identificación, conversión y coordinación realizados por un estudiante al resolver problemas (tabla 2). De dicha investigación se presenta en este artículo, una comparación entre el nivel de entendimiento de Hake (1998) y el nivel de comprensión de Hitt (1998) alcanzado por los estudiantes de acuerdo al tipo de instrucción recibida al estudiar la función exponencial. En las figuras 12 y 13, se muestra la clasificación de los estudiantes de los grupos control y experimental respectivamente, de acuerdo a la ganancia normalizada obtenida.

Tabla 2. Niveles de comprensión de Hitt

Nivel de comprensión	Características observadas en procedimientos de estudiantes
Nivel 1	Uso incoherente de diferentes representaciones del concepto después de someterse a un proceso de aprendizaje.
Nivel 2	Identificación de las diferentes representaciones de un concepto.
Nivel 3	Transformación, con la preservación del significado, de un sistema de representación a otro.
Nivel 4	Articulación coherente entre dos sistemas de representación.
Nivel 5	Articulación coherente de los diferentes sistemas de representación en la solución de un problema.

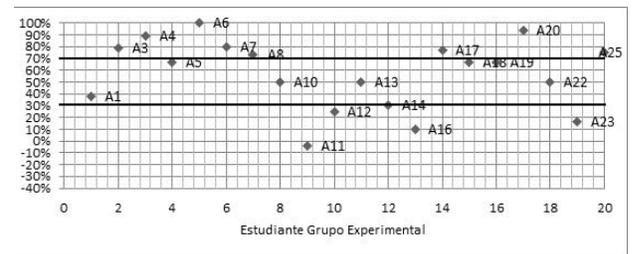
Fuente: elaboración basada en Hitt, 1998.

Figura 12. Niveles de Hake obtenidos por los estudiantes del grupo control



Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

Figura 13. Niveles de Hake obtenidos por los estudiantes del grupo experimental



Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

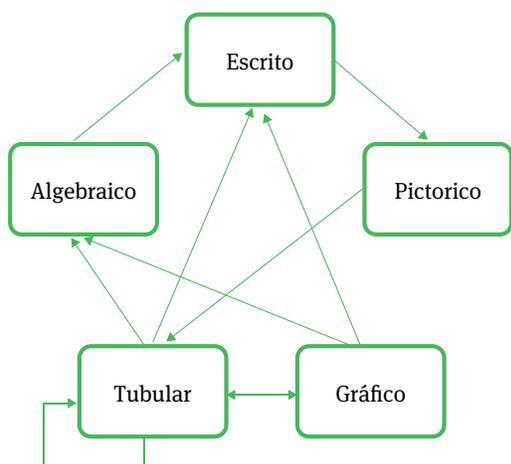
Tomando como referencia el nivel de entendimiento de Hake (1998), el grupo control obtuvo una ganancia normalizada promedio por debajo del 30%, generando con ello una clasificación baja en el nivel de entendimiento después de la instrucción. Mientras que, para el grupo experimental, la ganancia normalizada promedio se encuentra en el intervalo del 30% al 70%, clasificando el entendimiento del grupo en un nivel medio. Al respecto de la ganancia normalizada, Hake señala que si un método de enseñanza es eficiente, es más importante la ganancia respecto de su conocimiento inicial, que la calificación precisa de los estudiantes.

El coeficiente de ganancia normalizada fue más alto para la mayoría los estudiantes del grupo experimental que para los estudiantes del grupo control. Estos resultados parecen mostrar, que los estudiantes del grupo experimental lograron un mayor nivel de entendimiento conceptual que los estudiantes del grupo control. De acuerdo al nivel obtenido, el impacto de la instrucción es mayor cuando la instrucción se basa en el uso de distin-

tos registros de representación semiótica, privilegiando el trabajo con las conversiones clásicas y no clásicas.

El nivel de entendimiento de Hitt (1998) se establece a partir del uso de distintos registros y conversiones realizadas correctamente. Por tal motivo, se realizó una clasificación de los reactivos comunes en las evaluaciones de entrada y salida. Para la clasificación se tomó en cuenta el registro en el que se presenta el reactivo, llamado registro inicial o de partida y el registro en el que el estudiante dará la respuesta, llamado registro final o de llegada (figura 14).

Figura 14. Registro inicial y final utilizado en reactivos para evaluaciones de entrada y salida



Fuente: elaboración propia.

Los niveles de entendimiento (Hitt, 1998) se establecerán en términos del uso, identificación, conversión y coordinación de los registros escrito, algebraico, gráfico, tabular y pictórico realizados correctamente en los reactivos de la evaluación de salida. En la tabla 3 se muestran los reactivos o grupo de reactivos del instrumento de evaluación, con los que se determinaron cada uno de los niveles de entendimiento.

Tabla 3. Reactivos de la evaluación para determinar características en cada nivel de entendimiento de Hitt

Actividad cognitiva	Núm. Reactivo	Descripción del reactivo
Identificar la función exponencial	P7A	Identificar la función exponencial a partir de un registro tabular.
	P7B	Identificar la función exponencial a partir de un registro gráfico.
	P7C	Identificar la función exponencial a partir de un registro algebraico.
Conversión entre registros	P1A	Conversión del registro pictórico al registro tabular.
	P1B	Obtención de valores en un arreglo tabular siguiendo secuencias.
	P1C	Conversión del registro tabular al registro algebraico.
	P1D	Conversión del registro tabular o algebraico al registro gráfico.
Coordinación de registros	G-T	Localización de coordenadas en una gráfica e interpretación de coordenadas.
	G-A	Relacionar gráficas de funciones exponenciales crecientes o decrecientes con fórmulas.
	T-A	Obtención de expresiones algebraicas a partir de arreglos tabulares.
Evaluación de salida	P-T	Conversión del registro pictórico al registro tabular.
	G-T	Localización de coordenadas en una gráfica e interpretación de coordenadas.
	G-A	Relacionar gráficas de funciones exponenciales crecientes o decrecientes con fórmulas.
	G-V	Descripción de funciones crecientes o decrecientes y concavidad a partir del registro gráfico.
	A-V	Descripción de funciones crecientes o decrecientes y concavidad a partir del registro algebraico.
	T-V	Descripción de funciones crecientes o decrecientes y concavidad a partir del registro tabular.
	T-A	Obtención de expresiones algebraicas a partir de arreglos tabulares.

Fuente: elaboración propia.

Relación entre niveles de entendimiento de Hake y Hitt

Para medir el efecto del tipo de instrucción que recibieron los estudiantes, con base en el tipo de conversiones entre registros de representación que se privilegió en cada uno de los grupos, se utilizaron los niveles de entendimiento de Hake (1998) y los niveles de comprensión de Hitt (1998). La clasificación de los estudiantes en los tres niveles de entendimiento de Hake se obtuvo con el valor obtenido en la llamada ganancia normalizada, “razón del aumento entre una prueba preliminar y una prueba final respecto del máximo aumento posible” (Hake, 1998, p. 64). Para la clasificación en alguno de los cinco niveles de entendimiento de Hitt, se consideró que el estudiante tuviera el 100% de éxito en el grupo de reactivos seleccionados para determinar cada nivel (tabla 4).

Tabla 4. Clasificación del nivel de entendimiento de Hake y Hitt para los estudiantes de los grupos control y experimental

Nivel		Estudiantes	
Nivel Hake	Nivel Hitt	Grupo Control	Grupo experimental
Alto	5		A4, A6, A20
	4		
	3		A3, A7
	2		A17
	1		A8, A25
Medio	5		
	4		A18
	3	a8	A1, A5, A13
	2	a30	A14, A19, A22
Bajo	1	a9, a20, a28, a33	A10
	5		
	4		A12
	3	a2, a18	
	2	a6, a10, a12, a14, a23, a29, a32, a35	
	1		A11, A16, A23

Fuente: elaboración propia con base en los resultados de la investigación realizada.

De los ocho estudiantes (40%) del grupo experimental que parece haber sido altamente influenciados por la instrucción recibida, tres de ellos (A4, A6 y A20) están clasificados en el nivel 5 de entendimiento de Hitt. Lo anterior parece indicar que los estudiantes lograron coordinar los distintos registros de representación utilizados. Los estudiantes A3 y A7, también con nivel alto de Hake, están clasificados en un nivel 3 de comprensión de Hitt. Esto se debe a que presentan inconsistencias en una de las conversiones no clásicas: del registro gráfico al tabular y del registro tabular al algebraico respectivamente.

Los estudiantes A8 y A25 del grupo experimental, obtuvieron una clasificación en un nivel alto de Hake, lo cual indica que la instrucción recibida generó un impacto positivo, los estudiantes aprendieron a utilizar diferentes registros para representar a la función exponencial, realizando conversiones clásicas y en el sentido opuesto. Sin embargo, la secuencia didáctica no favoreció a los estudiantes mencionados para la identificación de la función exponencial en distintos registros de representación, por tal motivo, su clasificación en los niveles de comprensión propuestos por Hitt fue en el nivel 1. Además, al igual que A17, se muestran inconsistencias en las conversiones entre los registros gráfico y tabular. Una posible causa de que estos tres estudiantes hayan alcanzado solamente el nivel 1 de entendimiento, es su

falta de dominio en la conversión del registro gráfico al registro tabular. El problema mediante el cual se determinó la habilidad del estudiante para transitar en estos dos registros, presenta un alto grado de dificultad, debido a que contiene un número mayor de distractores del que normalmente se considera. Además de la necesidad de utilizar el registro escrito para enlazar los registros gráfico y tabular utilizando dos diferentes tipos de unidades.

Los estudiantes A10, a9, a20, a28 y a33 obtuvieron alrededor de 20 reactivos correctos en la evaluación de salida obteniendo con ello una ganancia normalizada de Hake media, es decir fueron impactados positivamente por el tipo de instrucción que recibieron, sin embargo, quedaron en el más bajo nivel de comprensión según Hitt. Estos estudiantes, no reconocen a la función exponencial en ninguna de sus representaciones y muestran inconsistencias en las conversiones, es decir, no siempre realizan una conversión correctamente.

Los estudiantes A11, A16, A23, a6, a10, a12, a14, a23, a29, a32 y a35 parecen coincidir en los niveles más bajos de Hake y Hitt. Lo anterior indica que la instrucción favoreció muy poco su entendimiento referente a la función exponencial. Además, a los estudiantes a10, a12, a29 y A11 la instrucción parece haberlos confundido, ya que sus ganancias fueron negativas, es decir, obtuvieron menos reactivos correctos en la evaluación de salida que en la de entrada.

Para determinar si un nivel alto de entendimiento de Hake genera en los estudiantes un nivel de comprensión alto de Hitt, se utilizó el coeficiente de correlación, pues éste informa sobre la fuerza de la relación entre dos variables. La correlación entre los niveles de entendimiento de Hake y Hitt obtenida es de 0,5, lo cual indica que existe una relación media entre los dos niveles de entendimiento.

CONCLUSIONES

La comparación entre dos herramientas de medición del nivel de entendimiento nos proporcionó una forma adicional de interpretar los resultados obtenidos en esta investigación. La ganancia normalizada de Hake nos indica en qué medida cambia el desempeño de los estudiantes con respecto al margen individual en que cada uno de ellos es capaz de mejorar. Por otro lado,

la clasificación en los niveles de entendimiento de Hitt nos permite un entendimiento más claro, y detallado del tipo de conversiones entre representaciones semióticas a través de las cuales los estudiantes fueron capaces de transitar.

Como respuesta a nuestras preguntas de investigación, encontramos que el 50% de los estudiantes expuestos a un proceso de aprendizaje con base en el uso de conversiones entre diversos registros de representación semiótica, apenas logró utilizar e identificar representaciones tabulares, gráficas y algebraicas de la función exponencial. Otro 25% de estos estudiantes alcanzaron una transformación, preservando el significado, entre las diferentes representaciones de la función exponencial. El restante 25% de los estudiantes lograron la articulación coherente entre los diferentes sistemas de representación, y fueron capaces de aplicarlos en la solución de un problema. En contraste, más del 80% de los estudiantes del grupo control, bajo un esquema de instrucción tradicional, se localizaron en los niveles 1 y 2 de acuerdo a la clasificación de Hitt. El resto del grupo apenas logró la transformación entre los sistemas de representación, sin pérdida del significado, esto es, sólo llegaron al nivel 3 de entendimiento de Hitt.

El impacto que una instrucción que privilegia el uso de distintos registros de representación semiótica genera, se encuentra en un nivel medio (entre 30% y 70%). Contrastado con una ganancia normalizada promedio por debajo del 30%, la cual se ubica en un nivel bajo, obtenida por el grupo control, en el que se utilizaron las conversiones clásicas.

La relación entre los niveles de entendimiento conceptual que define Hake (1997) y los niveles de comprensión de Hitt (1998) que encontramos fue media. La correlación entre estas dos herramientas de medición del entendimiento fue del 50%.

Los porcentajes en general, muestran que una instrucción que privilegia los cambios de representación semiótica promueve la obtención de mejores niveles de entendimiento. Es necesario que la comunidad conozca y adopte los modelos diseñados por investigadores en el área de la Matemática Educativa.

Como trabajo futuro, se desarrollará un estudio cualitativo de las observaciones relacionadas con el razonamiento alcanzado por los estudiantes. También, se diseñarán e implementarán nuevas secuencias didác-

ticas que lleven al mejor entendimiento de los temas integradores de las materias de matemáticas en general, y de cálculo en particular. Finalmente, se advierte que el acceso a los Sistemas Nacionales de Educación es indispensable para promover un uso generalizado de materiales diseñados con base en investigaciones de Matemática Educativa.

REFERENCIAS

- Alarcón, H., y de la Garza, J. (2009). *Influencia del razonamiento científico en el aprendizaje de conceptos en Física Universitaria: comparación entre instrucción tradicional e instrucción por modelación* [archivo pdf]. Veracruz: Autor. Recuperado de: http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_05/po-nencias/1189-F.pdf
- Amado, M., García, A., Brito, R., Sánchez, B., y Sagaste, C. (2014). Causas de reprobación en ingeniería desde la perspectiva del académico y administradores. *Ciencia y Tecnología*, 14, 233-250. Recuperado de: http://www.palermo.edu/ingenieria/pdf2014/14/CyT_14_15.pdf
- Castro, M. y González, G. (2015). *Entendimiento de la función exponencial mediante conversiones entre registros de representación semiótica* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México.
- Chávez, J., Flores, S. y Alfaro, L. (2013). *El desarrollo de los niveles de abstracción: La articulación entre los sistemas de representación en distintos contextos a través del concepto de variación*. México: Editorial Académica Española.
- Duval, R. (1992). Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sánchez (Ed.), *Antología en Educación Matemática*, (pp. 125-139). México: Cinvestav-IPN.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, Francia, 5, 37-65. Recuperado de: https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Original publicado en 1995).
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 9.1. Recuperado de http://dmle.icmat.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf.
- Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *EMA*. 6 (2), 180-200. Recuperado de: [http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/\(04\)RD.pdf](http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/(04)RD.pdf)
- Hake, R. (1998). Interactive Engagement vs Traditional Methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for Introductory Physics Courses. *American Journal of Physics*, 66 (1), 64-74. Recuperado de http://www.montana.edu/msse/Data_analysis/Hake_1998_Normalized_gain.pdf
- Hitt, F. (1998). Function, Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior JMB*, 17. 123-134. Recuperado de: http://www.academia.edu/807002/Difficulties_in_the_articulation_of_different_representations_linked_to_the_concept_of_function
- http://www.academia.edu/807002/Difficulties_in_the_articulation_of_different_representations_linked_to_the_concept_of_function
- Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates.
- Larson, R., Hostetler, R., y Edwards, B. (2009). *Cálculo diferencial. Matemáticas 1*. México: McGraw-Hill.
- Nieto, N., Viramontes, J. y López, F. (2009, noviembre). ¿Qué es Matemática Educativa? *CulCyT*, 35. Recuperado de: <http://revistas.uacj.mx/ojs/index.php/culcyt/article/view/307/291>
- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2013). *Programa de estudios de educación básica, secundaria*. México. Recuperado de: <http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/index.php/sec-mat-segundo-grado?sid=734>
- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2014). *Subsecretaría de Educación Media Superior*. México. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/4to_SEMESTRE/Matematicas_IV_biblio2014.pdf
- Sureda, D. (2012). Enseñanza de las funciones exponenciales en la escuela secundaria. Aspectos didácticos y cognitivos. *Enseñanza de las ciencias*. 30 (3), 321-326. Recuperado de <http://ensciencias.uab.es/article/view/947/pdf>
- Sureda, D. y Otero, M. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación Matemática*, 25, 89-118. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40528961005>
- Waldegg, G. (1998). *La Educación Matemática*. Recuperado de: http://cdigital.uv.mx/bitstream/123456789/5804/2/la_educacion_matematica.htm

NOTAS DE AUTOR

- ^a Profesora – investigadora, Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez. Línea de investigación: Matemática educativa. Correo Electrónico: ma_gpe_castro@hotmail.com
- ^b Profesora – investigadora, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Línea de investigación: Física educativa. Correo Electrónico: mgonzalez@itcj.edu.mx
- ^c Profesor Investigador de Tiempo Completo, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Línea de investigación: Física educativa. Correo Electrónico: seflores@uacj.mx. Autor de correspondencia.
- ^d Profesor Investigador de Tiempo Completo, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Línea de investigación: Matemática educativa. Correo Electrónico: o.ramirez@uacj.mx
- ^e Profesora Investigadora de Tiempo Completo, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Línea de investigación: Matemática educativa. Correo Electrónico: maria.cruz@uacj.mx
- ^f Profesora Investigadora de Tiempo Completo, Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez. Línea de investigación: Matemática educativa. Correo Electrónico: cfuentes@itcj.edu.mx