

CAOTICIDADES

Fernando Cortés y Antonio Gamboa*

Vicente Talanquer y Glinda Irazoque
(Coordinadores)

PARA SABER...

El pasado determina al presente y éste es la condena del futuro. Toda causa provoca un único efecto. El comportamiento del Universo es absolutamente predecible. Y no hay más; el caos y el azar desaparecerán cuando superemos nuestra ignorancia. Así versó nuestra sentencia el siglo pasado..., y la rebelión del siglo xx fue terrible.

Hoy día nuestra visión sobre la evolución del Universo se ha modificado drásticamente gracias a las enormes transformaciones conceptuales que se derivaron de la Mecánica Cuántica, la Teoría de la Relatividad y, más recientemente, de la increíble Teoría del Caos. De la noche a la mañana el futuro se tornó inasible; perdimos la confianza, recuperamos la libertad.

Los seres humanos siempre se han preocupado por buscar las leyes que rigen la evolución temporal del mundo que les rodea. Han establecido así un conjunto de relaciones que permiten realizar predicciones sobre el estado futuro de un sistema con base en el conocimiento de su historia previa. Estas reglas, que por su naturaleza se denominan "deterministas", pueden ser simples o complejas, pero independientemente de su estructura se espera de ellas una fidelidad absoluta; una capacidad predictiva sin límite.

Sin embargo, en los últimos años, gracias al desarrollo de las computadoras y mejores métodos numéricos para resolver los problemas, se ha encontrado que existen sistemas que a pesar de estar gobernados por ecuaciones deterministas simples, exhiben un comportamiento que anula toda posibilidad de vaticinio o presagio; son, en la práctica, absolutamente impredecibles (Crutchfield, 1986). Esta característica es una propiedad intrínseca del sistema que no se evita acumulando más información y, sorprendentemente, su presencia es más una regla que la excepción. Así, el fenómeno se ha observado en el estudio de movimientos planetarios (Laskar, 1991), la predicción del clima (Nicolis, 1991), la cinética de algunas reacciones químicas (Núñez, 1992), el crecimiento de cristales dendríticos (Perrin, 1991), la evolución de sistemas fisiológicos y

ciertas dinámicas poblacionales (May, 1991), etcétera.

Perder la capacidad de predecir el futuro a largo plazo es un verdadero desastre, es el caos, y por eso vale la pena puntualizarlo. En la naturaleza existen sistemas cuyo comportamiento, a pesar de estar regido por ecuaciones deterministas, puede volverse tan irregular y azaroso que resulta impredecible. La estructura de las relaciones que describen su evolución temporal es no lineal (su representación gráfica no da lugar a una línea recta), y el sistema es extraordinariamente sensible a la especificación de las condiciones iniciales (Dresden, 1992); cualquier pequeño cambio en el estado inicial tiene dramáticos efectos sobre el comportamiento futuro. La predicción del fenómeno requeriría del conocimiento absoluto de los datos iniciales, de los parámetros internos y externos que condicionan la evolución, y un control extremo del proceso; esto es imposible independientemente de qué tanto logremos mejorar nuestros aparatos de medición y control.

Cuando hablamos de la susceptibilidad de un sistema caótico a las influencias externas estamos considerando un comportamiento que raya en la histeria. En la predicción de la trayectoria de una bola de billar que choca con otras en su camino, aun bajo condiciones ideales, bastaría ignorar el efecto gravitacional de un electrón situado en la frontera de nuestra galaxia, para comenzar a obtener resultados erróneos después de un minuto de haberla lanzado (Crutchfield, 1986).

Muchos sistemas son capaces de tener un comportamiento regular o caótico de acuerdo con las condiciones a las que estén sujetos; desgraciadamente no existen reglas generales que permitan decidir *a priori* si exhibirán o no una dinámica caótica. El tránsito entre el orden y el caos puede darse de manera brusca o gradual, y esto cambia de sistema a sistema. Sin embargo, cuando se da, el resultado es increíble.

Sobre el fenómeno del Caos, a pesar de la relativa novedad del tema, ya se ha escrito mucho (Briggs, 1990). De hecho, recientemente aparecieron en *Educación Química* dos artículos en los que las características de los sistemas caóticos se definen con más precisión

*Facultad de Química, UNAM, División de Estudios de Posgrado, 04510, México, D.F.

(Núñez, 1992). Es por ello que en este "Para Saber, Experimentar y Simular" lo que queremos es presentar ejemplos prácticos para "jugar" con él; para generarlo en el laboratorio y con la computadora; para que nadie pierda la oportunidad de maravillarse y sorprenderse.

EXPERIMENTAR,...

Una ley dinámica es una relación en la que la información del pasado se utiliza para construir el presente, y las características de éste determinan el futuro. Para ello no importa si el proceso se da de manera continua (se le llama entonces flujo) o en pasos discretos (mapeo). En este último caso se acostumbra suponer que el estado del sistema al tiempo $i + 1$, caracterizado por la variable x_{i+1} , depende del estado al tiempo i , a través de una relación del tipo:

$$x_{i+1} = f(x_i)$$

donde $f(x)$ es la función que gobierna la dinámica (Kadanoff, 1983). La historia del sistema se construye tomando un estado inicial x_0 , que permite generar $x_1 = f(x_0)$, y $x_2 = f(x_1)$, y $x_3 = f(x_2)$...; es decir, se realiza lo que en matemáticas se conoce como una "iteración" o *feedback* (retroalimentación).

Cuando las características de la dinámica, iteración o retroalimentación son no lineales ($x_{i+1} = rx_i^2$, por ejemplo), la evolución puede ser tan susceptible a las condiciones del proceso que cualquier ligera perturbación trastorna el comportamiento del sistema. Para ilustrar el efecto de una iteración no lineal basta realizar un sencillo experimento con una televisión y una cámara de video (Peitgen, 1991); la idea básica consiste en hacer la filmación del monitor transmitiendo la imagen a éste para ser de nuevo filmada, y así sucesivamente (*videofeedback*).

El experimento debe realizarse en un cuarto oscuro, colocando la cámara de video frente al monitor a una distancia que asegure que el tamaño del objeto filmado (pantalla de tv) no se altera por la filmación (el monitor, que es lo que se filma, cabe justo en él mismo). La televisión se mantiene encendida con el control de contraste al máximo y la brillantez al mínimo. Para iniciar la experiencia la cámara de video se rota 45° con respecto a la vertical y se conecta a la televisión, enfocando a la pantalla. La sorpresa empieza cuando

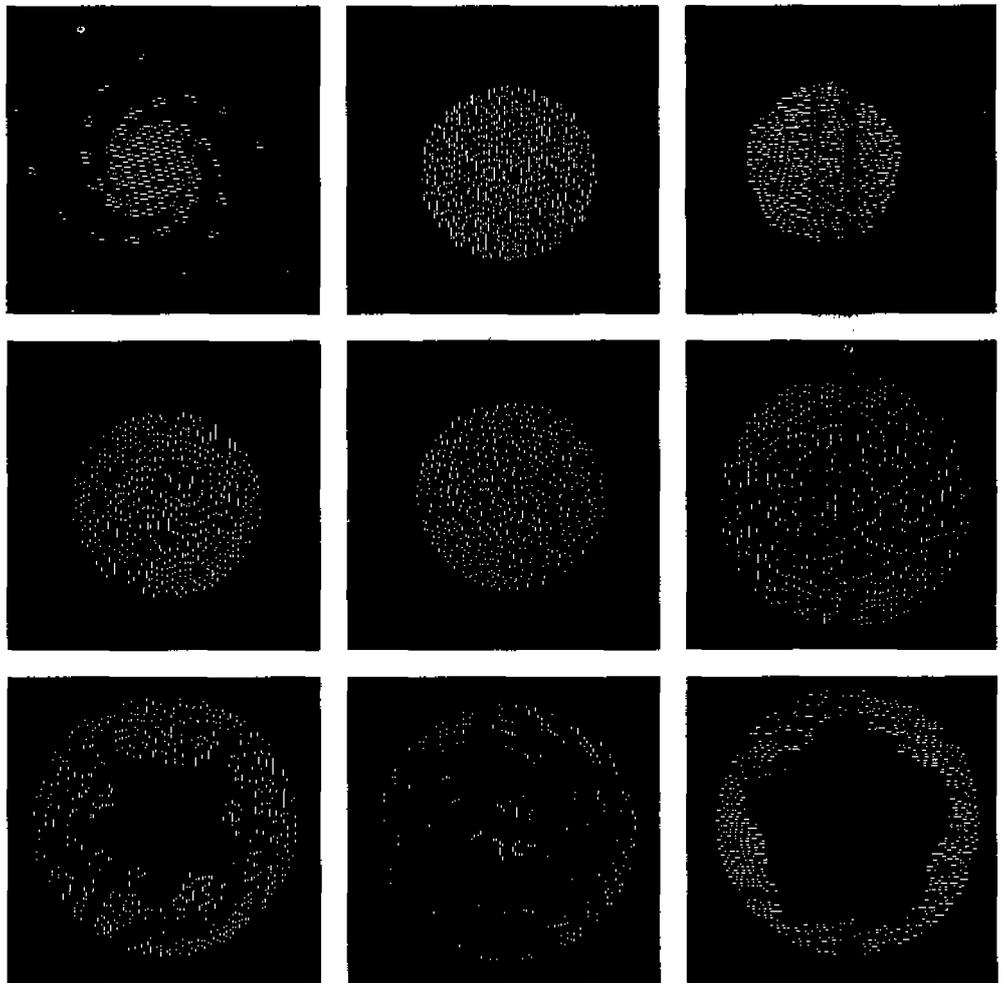


Figura 1. Patrones reales generados en el experimento de *videofeedback*. Las imágenes se obtienen a diferentes ángulos de inclinación y distancias entre la cámara de video y el monitor (de 25").

un cerillo se enciende enfrente del televisor y la imagen es captada por la cámara.

En un principio uno podría esperar que la filmación reiterada de una sola imagen nos lleve a obtener una secuencia simple de objetos similares. Sin embargo esto no es así, porque la regla de iteración no es sencilla; en ella están involucrados complejos efectos tales como el desfase de tiempos entre el momento que la cámara "ve" algo y esto aparece en la pantalla, las características del proceso de reproducción de una imagen (por líneas), el efecto de memoria del fósforo en el monitor, etcétera (Peitgen, 1991; Hofstadter, 1982). El resultado real es que se producen un conjunto de imágenes muy complicadas (Figura 1) que poco tienen que ver con la imagen inicial, y que evolucionan de una manera totalmente impredecible.

La experiencia, para quien decida reproducirla, es realmente abrumadora. El monitor se convierte en una fuente inagotable de estructuras simétricas o asimétricas, pulsantes o estacionarias; estrellas, espirales, laberintos, etcétera, que aparecen y desaparecen sin cesar. Difícilmente puede encontrarse otro experimento que

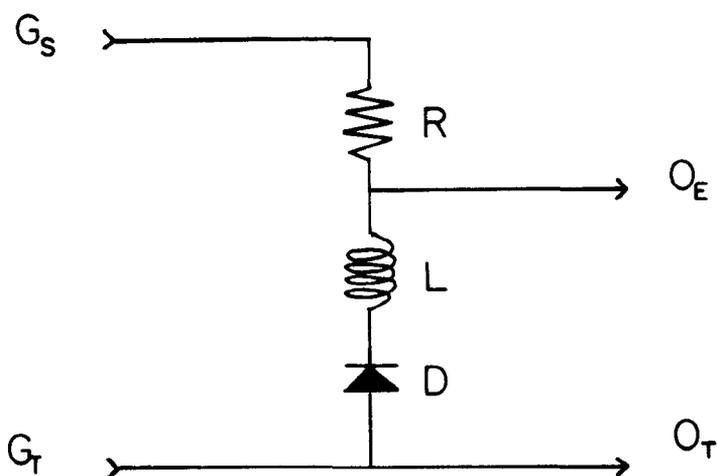


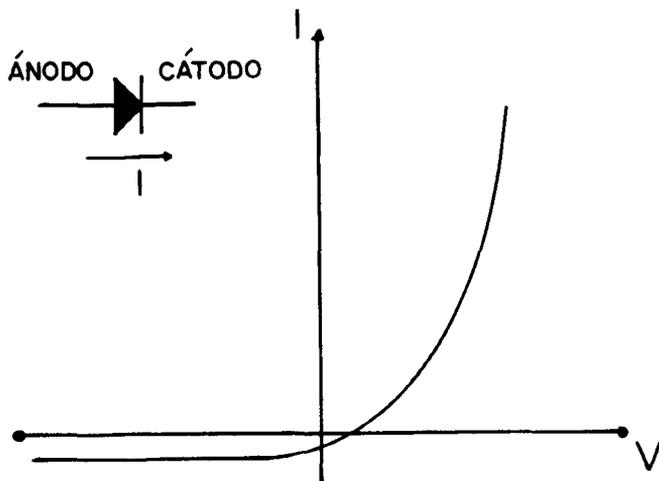
Figura 2. Representación esquemática del circuito eléctrico experimental. Se muestran la resistencia (R), la inductancia (L), el diodo (D), y las conexiones de entrada, salida y tierra para el osciloscopio (O) y el generador de señales (G).

ilustre tan claramente la complejidad que puede esconderse detrás de un proceso regido por una dinámica no lineal; difícilmente se hace tan evidente la enorme fuente de creatividad dinámica y estructural que implica todo comportamiento caótico.

El experimento con la cámara de video, aunque muy ilustrativo, no permite realizar un estudio detallado de la evolución del sistema desde un estado regular y ordenado hasta un régimen caótico. Por ello presentamos otra experiencia sencilla fácilmente reproducible en cualquier laboratorio de electromagnetismo (Briggs, 1987; Smith, 1992).

En este caso necesitamos construir un circuito eléctrico como el que se representa en la Figura 2. Los elementos básicos son una resistencia (R , 20–100 Ω), un inductor o bobina (L , 0.1–0.5 H), y un diodo (tipo 1N4003, 1N4004) arreglados en serie junto con un

Figura 3. Respuesta típica de un diodo. El sistema es conductor cuando el voltaje en el cátodo es menor que en el ánodo.



generador de señales de baja frecuencia (G). El comportamiento del sistema puede seguirse conectando un osciloscopio (O) entre el resistor y el inductor para registrar la señal de salida (si el osciloscopio tiene capacidad para otras entradas conviene también conectarlo al generador de señales).

La fuente de caos en este dispositivo se encuentra en el diodo, el cual, idealmente, sólo conduce la corriente en una dirección (del ánodo al cátodo). El diodo comercial funciona también como capacitancia cuando el voltaje aplicado no tiene la polaridad adecuada; una respuesta típica es como la que se ilustra en la Figura 3. El tipo de régimen que prevalece depende del voltaje en el cátodo y del tiempo que éste se mantiene; si la amplitud y frecuencia de la señal generada por la fuente son suficientemente altas, la respuesta del diodo se defasa y el comportamiento global del circuito se torna caótico (Smith, 1992).

Para iniciar el experimento basta conectar el generador de señales para producir ondas sinusoidales cuya frecuencia sea del orden de 100–1000 kHz, y una amplitud inferior a 1 V. La señal de salida en la pantalla del osciloscopio en su modo t - y tendrá la misma frecuencia que la de entrada, y si se comparan ambas en el modo x - y del aparato, se tendrá un registro de un sólo ciclo (Figura 4a).

Aumentando la amplitud del voltaje aplicado, la respuesta del sistema cambia repentinamente dando lugar a una señal con dos componentes, cada una con su propia frecuencia. Se produce lo que en el lenguaje del Caos se conoce como una "bifurcación", y el periodo de la oscilación crece; se tienen dos picos a diferentes alturas en el modo t - y , o un doble ciclo en el x - y (Figura 4b). A medida que la amplitud se incrementa (Figura 4c), la señal se bifurca una y otra vez (4, 8, 16,...) hasta alcanzar el comportamiento caótico, donde se pierde la periodicidad de la señal de salida y ésta se torna impredecible (Figura 4d). La amplitud del voltaje de entrada puede regularse haciendo uso de un reóstato, o modificando la resistencia del sistema con circuitos en serie y en paralelo diversos; esto mejora notablemente la visualización del proceso. La selección de la frecuencia de trabajo depende del valor de la inductancia y del tipo de diodo utilizado.

El experimento se presta a múltiples variaciones para estudiar la influencia de parámetros tales como la magnitud de la resistencia y la inductancia, el tipo de diodo, la frecuencia de la señal de entrada, su forma, etcétera. Adicionalmente, la simulación computacional puede realizarse con facilidad y permite hacer una comparación sistemática entre las predicciones del modelo teórico utilizado (circuito RLC), y los resultados que se obtienen al modificar cada parámetro de interés.

...Y SIMULAR

Resulta difícil presentar aquí una simulación computacional que reproduzca las bellas imágenes obtenidas

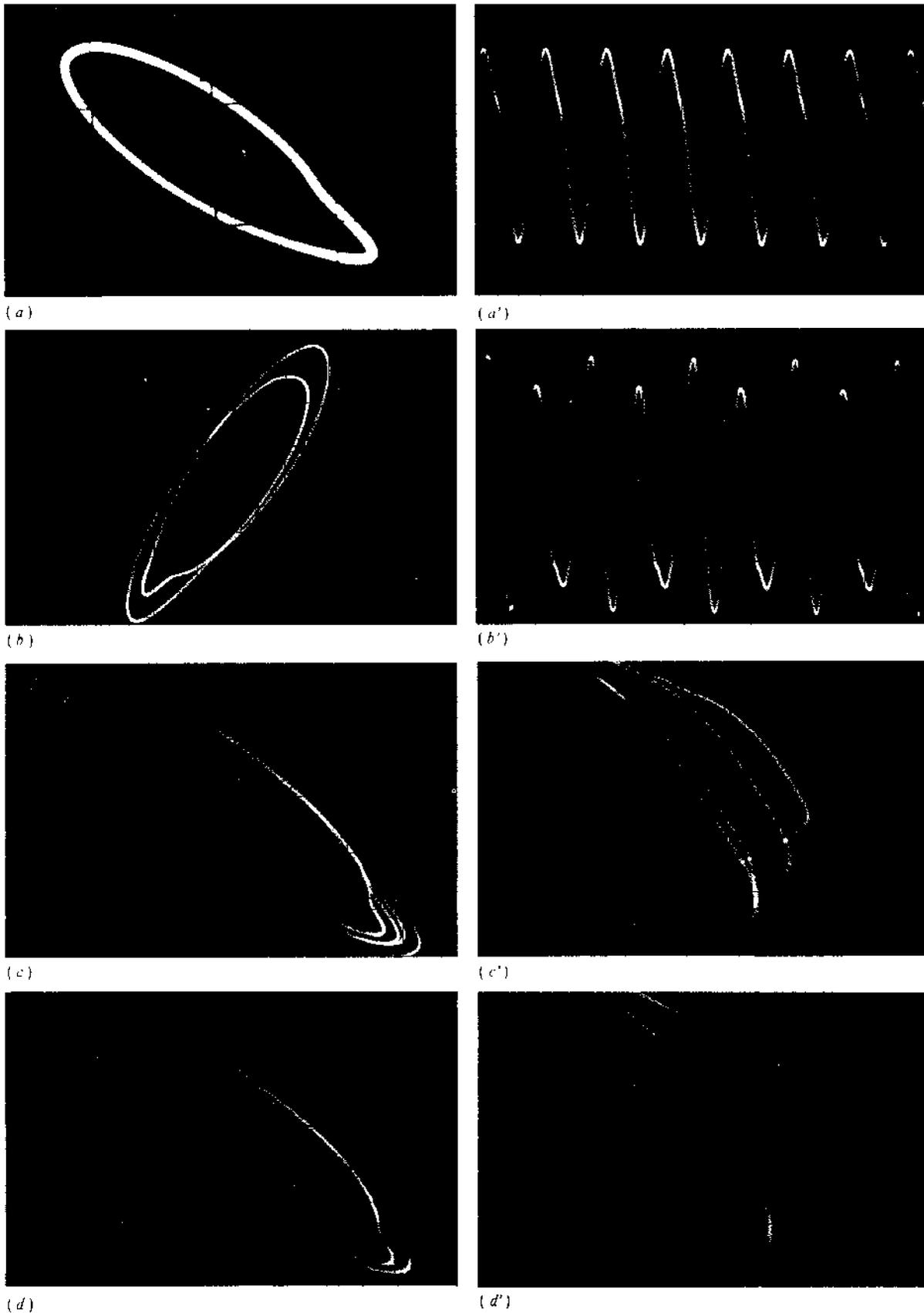


Figura 4. Respuesta eléctrica del circuito caótico en el modo $x-y$ del osciloscopio. (a) Oscilación simple, (b) doble, (c) cuádruple, (d) régimen caótico. Resultados para el caso $R = 30$, $L = 0.15$ H, diodo 1N4003, $v = 900$ kHz. En (a') y (b') se presenta también la respuesta del sistema en el modo $x-t$; en (c') y (d') se muestran detalles de la estructura del atractor.

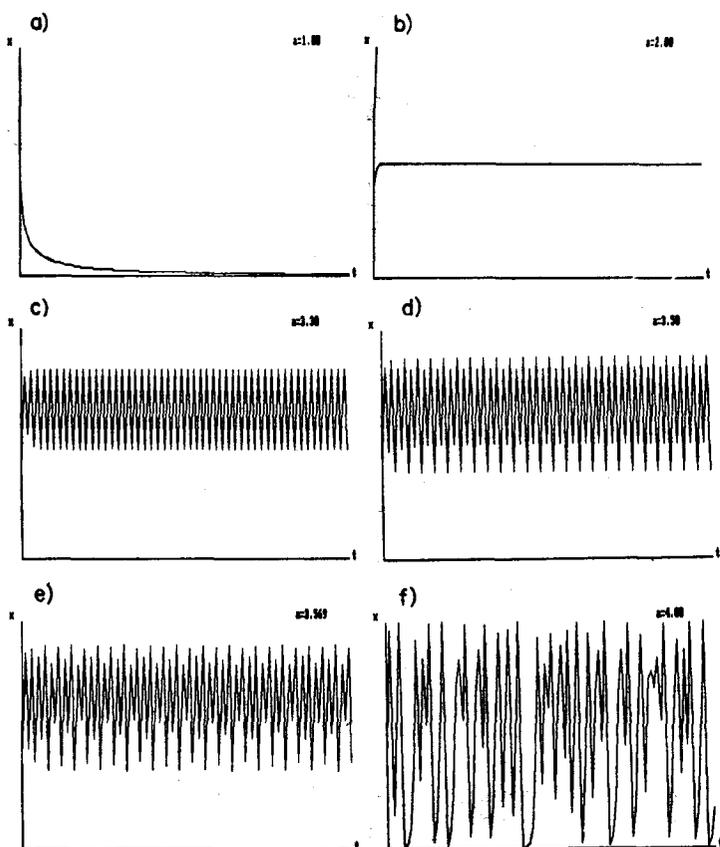


Figura 5. Evolución temporal para la dinámica poblacional descrita en el texto. a) Para $a < 1$ la población se extingue. b) En el intervalo $1 < a < 3$ la población se estabiliza en un valor constante diferente de cero. c) Cuando $3 < a < 3.4495$ la población oscila entre dos valores. d) Oscilación entre cuatro valores posibles. e) Oscilación entre 32 valores posibles. f) Régimen caótico ($a < 3.5699$).

en el experimento de la "retroalimentación" por video. Sin embargo, sus características básicas aparecen al analizar la evolución temporal de un sistema gobernado por un proceso iterativo no lineal. Para ilustrarlo hemos elegido un modelo sencillo y muy conocido para el crecimiento de una población de organismos vivos; insectos en una isla, por ejemplo (Davies, 1987).

Denotemos a la población en el año i como N_i , y supongamos que si hay comida y condiciones favorables este número se incrementará rápidamente. Al año siguiente, sin embargo, comenzarán a surgir los problemas; un mayor número de individuos dará lugar a más competencia por el alimento y algunos de ellos ya no podrán sobrevivir. La evolución de la población está determinada entonces por dos factores: el primero controla los nacimientos y podemos considerarlo proporcional a $N_i(aN_i)$; el segundo incide en el número de muertes por competencia. En la medida que la competencia surge del enfrentamiento entre dos individuos de la misma

especie y la probabilidad de ocurrencia de esto depende de que existan y se encuentren (manejado como eventos independientes), supondremos que este segundo factor es proporcional al cuadrado de la población existente (bN_i^2). Así, en una primera aproximación, la población en años sucesivos se estima utilizando la ecuación:

$$N_{i+1} = aN_i - bN_i^2 = N_i(a - bN_i)$$

que en términos de la variable $X_i = (bN_i/a)$ resulta

$$X_{i+1} = aX_i(1 - X_i)$$

donde X_i es una medida de la razón de la población en el año i con respecto a una población máxima de referencia ($0 \leq X_i \leq 1$).

La historia de un sistema gobernado por una dinámica como ésta puede seguirse asignando un valor al parámetro a y eligiendo una población inicial X_0 . Con ello se calcula la población al año siguiente, X_1 , que a su vez permite calcular X_2 , y así sucesivamente. Este proceso es de nuevo una iteración y se realiza con suma facilidad haciendo uso de la computadora (ver el cálculo para la evolución temporal en el programa anexo para el mapeo logístico) (Dewdney, 1987).

Cuando se analiza el comportamiento a largo plazo de la población como función del parámetro de crecimiento a , el cual toma valores entre 0 y 4 para asegurar que la razón X_i se mantenga entre 0 y 1, pueden distinguirse varios casos:

- Para valores de a menores que 1, la tasa de nacimientos es tan baja que la población decrece año con año, y termina por extinguirse (Figura 5a). Esto sucede siempre independientemente de cuál sea la población inicial.
- En la región de a entre 1 y 3, la población se estabiliza en un valor constante diferente de cero dado por $X = 1 - 1/a$ para cualquier selección de X_0 (Figura 5b).
- A partir de $a > 3$ las cosas se complican. En cuanto el parámetro de crecimiento es un poco mayor que tres, la población comienza a oscilar año con año entre dos valores distintos (Figura 5c) y se acostumbra decir que la solución antes estable se "bifurca" (genera dos ramas). Esta situación se mantiene hasta $a \approx 3.4495$, donde cada rama de nuevo se bifurca y la población adquiere año con año cuatro valores diferentes (Figura 5d). El incremento de a reproduce el esquema en cada rama y el periodo de oscilación aumenta a 8, 16, 32 (Figura 5e), ..., hasta que en $a \approx 3.5699$ el ciclo tiene una duración infinita. A partir de aquí poco o nada es predecible; el comportamiento se torna caótico (Figura 5f) y la evolución temporal es muy susceptible a las condiciones iniciales. Por ejemplo, en el extremo $a = 4$ un error del orden de 10^{-6} en la especificación de X_0 conduce a una diferencia del

orden de la unidad (diferencia máxima) después de 50 iteraciones.

La transición hacia el caos se ve más claramente cuando se grafica el valor que alcanza la población a tiempos largos como función del parámetro de crecimiento a (Dewdney, 1987). El resultado permite analizar las características de lo que se conoce como una "cascada de bifurcaciones" en la ruta hacia el comportamiento caótico. (La Figura 6 ilustra la cascada y ha sido generada con la segunda parte del programa anexo para el mapeo logístico). En esta representación sorprende la compleja estructura de la región caótica, en particular la presencia de las franjas blancas donde se recupera un comportamiento regular y el caos aparece sólo de forma intermitente (por ejemplo para a entre 3.8284 y 3.8415).

Aunque siguiendo un proceso mucho más complejo en el que intervienen un mayor número de variables, el resultado de la experiencia con la cámara de video es similar al de la dinámica poblacional si consideramos que la distancia del monitor a la cámara, o el ángulo de inclinación de ésta, juega el papel del parámetro de control (a) que arrastra al sistema hacia la región del caos.

Un comportamiento completamente análogo al anterior aparece también al estudiar las propiedades del circuito eléctrico descrito en la sección EXPERIMENTAR. Éste puede concebirse como un circuito RLC (Figura 7) forzado por una FEM externa del tipo:

$$V = V_0 \text{sen}(\omega t),$$

en el que el diodo juega el papel de un elemento capacitivo con capacitancia variable. La ecuación diferencial que describe al sistema se obtiene aplicando la regla de las mallas de Kirchhoff (Sears, 1986) al caso considerado:

$$V = V_c + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2Q}{dt^2}$$

donde Q representa a la carga y

$$V_c = \frac{q/c}{(1 - q/c)}$$

es una buena aproximación para la diferencia de potencial a través del diodo (Linsay, 1981; Testa, 1982).

La solución a este problema se genera computacionalmente haciendo uso del método de Euler (Gould, 1988) —el programa se anexa—, y la evolución temporal (flujo) se analiza como función de la amplitud del voltaje externo V_0 (parámetro de control análogo a a en el caso de la población).

Para los valores de resistencia ($R = 1$), inductancia ($L = 2$) y capacitancia ($C = 1$) que hemos seleccionado, el caos se presenta más claramente para frecuencias angulares (ω) de la FEM externa superiores a la fre-

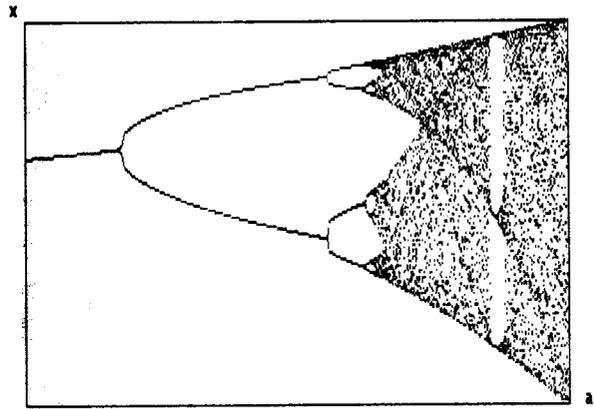
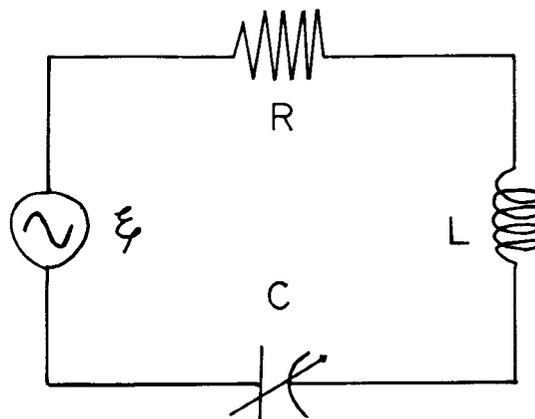


Figura 6. Representación gráfica de los valores de la población a tiempos grandes como función del parámetro de crecimiento a (Cascada de bifurcaciones).

cuencia angular de resonancia para el circuito ($\omega_r^2 = 1/(LC)$). Cuando $\omega = 1.5$, por ejemplo, el sistema muestra un comportamiento periódico simple para amplitudes del voltaje de entrada V_0 inferiores a 2.43; esto se hace evidente analizando la evolución de la carga en el sistema como función del tiempo, o bien, a través de la representación gráfica de una diferencia de potencial en el circuito (Q/C , por ejemplo) como función de V (Figura 8a). Ambas representaciones son muy similares a las que se generan con el osciloscopio (sección EXPERIMENTAR) en sus modos $t-y$ y $x-y$, respectivamente. Esta última es particularmente interesante pues manifiesta claramente el carácter periódico de la dinámica y permite analizar su comportamiento a largo plazo; de hecho es una manera de construir el "atractor" o estado al que tiende el sistema a tiempo infinito (Crutchfield, 1986). En el programa para la computadora que incluimos se realizan ambas gráficas, eliminando de la representación las soluciones iniciales transitorias (de ahí que haya un tiempo de espera antes de iniciar el graficado).

Figura 7. Circuito eléctrico tipo RLC utilizado para la simulación computacional.



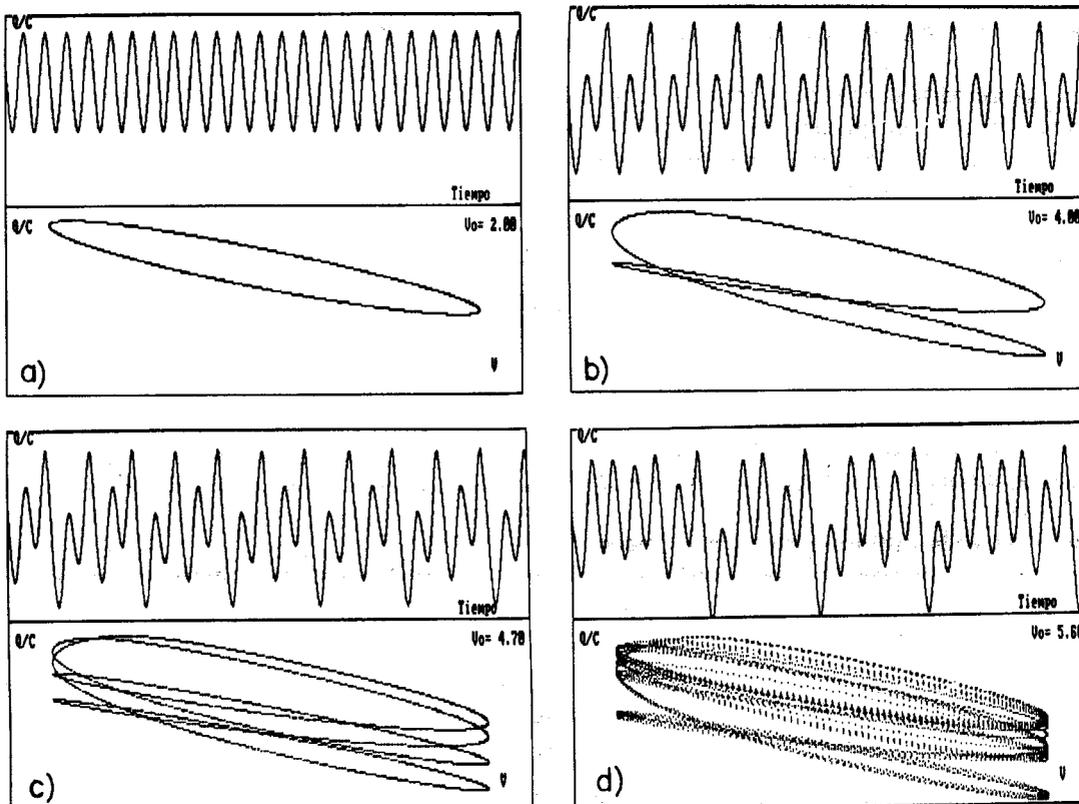


Figura 8. La simulación computacional permite analizar el comportamiento de la carga como función del tiempo y del voltaje aplicado V . a) $V_0 = 2$, b) $V_0 = 4.0$, c) $V_0 = 4.7$, d) $V_0 = 5.6$ (régimen caótico).

Al aumentar el valor de V_0 , el comportamiento dinámico es arrastrado a través de una cascada de bifurcaciones similar a la ya descrita en el problema anterior, de manera que el periodo de oscilación del circuito se completa después de 2 ($2.43 < V_0 < 4.35$), 4 ($4.35 < V_0 < 4.83$), 8, 16, ... ciclos (Figuras 8b y 8c), hasta alcanzar la región del caos donde se pierde toda posible regularidad (Figura 8d).

La analogía entre el comportamiento del circuito eléctrico y la dinámica de poblaciones es aún más estrecha de lo que podemos imaginar (Linsay, 1981). En su tránsito hacia el estado caótico ambos exhiben características "universales" que son comunes a sistemas que realizan el viaje por un mecanismo de duplicación de periodos (Rietman, 1989; Pérez Pascual, 1989). El Caos no sólo parece estar en todas partes, sino que su huella es muchas veces única, indeleble, inconfundible.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración de Guillermo Sosa en la toma de fotografías, de Octavio Herrera en el montaje experimental del circuito RLC, así como al Laboratorio de Física de la Facultad de Química, por el préstamo del material utilizado en dicho experimento. Este trabajo, junto con el publicado en el número anterior (¿Cuándo moja? ¿Cuándo no?) se desarrolló con el apoyo de la DGPA-UNAM (proyecto 51.53.418.01)

BIBLIOGRAFÍA

- Briggs, K. Simple experiments in chaotic dynamics, *Am. J. Phys.*, **55** [12] 1083 (1987).
- Briggs, J. y Peat, F. D. *Turbulent Mirror*, Harper and Row, New York, 1990 (ver la bibliografía incluida ahí).
- Crutchfield, J. P., Doynne Farmer, J., Packard, N. H. y Shaw, R. S. Chaos, *Scientific American*, **256** [6] 46 (1986).
- Davies, P. *The Cosmic Blueprint*. Chap. 4. Ed. Heinemann; London, 1987.
- Dewdney, A. K. Computer Recreations: Probing the strange attractions of chaos, *Scientific American*, **257** [1] 108 (1987).
- Dresden, M. Chaos. A New Scientific Paradigm or Science by Public Relations? *The Physics Teacher*, **30**, 11 (1992); **30**, 75 (1992).
- Gould, H. y Tobochnik, J. *An Introduction to Computer Simulation Methods. Applications to Physical Systems*. Addison-Wesley, USA, 1988.
- Hofstadter, D., Goedel, Escher, Bach: *Una eterna trenza dorada*, CONACYT. México, 1982.
- Kadanoff, L. P. Roads to Chaos, *Physics Today*, December, 46 (1983)
- Laskar, J. y Froeschlé, C. El Caos en el Sistema Solar, *Mundo Científico*, **11**, 732 (1991).
- Linsay, P. S. Period Doubling and Chaotic Behavior in a Driven Anharmonic Oscillator, *Phys. Rev. Lett.*,

- 47, 1349 (1981),
 May, R. M. El Caos en Biología, *Mundo Científico*, 11, 746 (1991).
 Nicolis, C. ¿Puede bascular el clima?, *Mundo Científico*, 11, 742 (1991).
 Núñez Yépez, H. N., Salas Brito, A. L., Vargas, C. A. y Vicente, L. Sobre predecibilidad y caos en sistemas clásicos, *Educ. quím.*, 3 [1] 64 (1992); Sistemas químicos oscilantes y caos, *Educ. quím.*, 3 [2] 96 (1992).
 Peitgen, H. O., Jürgens, H. and Saupe, D. *Fractals for the Classroom*. Springer Verlag, New York, 1992.
 Pérez Pascual, R. El Caos Determinista: Los Límites de la Predicción Científica, *Universidad de México* [463] 19 (1989).
 Perrin, B. y Tabeling, P. Las dendritas, *Mundo Científico*, 11, 796 (1991).
 Rietman, E. *Exploring the Geometry of Nature*, Windcrest Books, USA, 1989.
 Sears, F. W., Zemansky, M. W. y Young, H. G. *Física Universitaria*. Cap. 29. Sexta edición; FEI. México, 1986.
 Smith, D. The Amateur Scientist: How to generate chaos at home. *Scientific American*, 266 [1] 121 (1992).
 Testa, J., Peres, J. and Jeffries, C. Evidence for Universal Chaotic Behavior of a Driven Nonlinear Oscillator, *Phys. Rev. Lett.*, 48, 714 (1982).



PROGRAMA PARA EL ANÁLISIS DE LA DINÁMICA POBLACIONAL $X_n = aX(1-X)$

```

SCREEN 2
INPUT "Qué quieres ver: 1-Comportamiento temporal, 2-Cas-
cada de Bifurcaciones ";z
INPUT "Qué población inicial (0-1)";zo
IF z=2 THEN 10
INPUT "Qué parámetro de crecimiento quieres (0-4), a= ";a
CLS

REM "Instrucciones para la graficación"
WINDOW (-5,-.1)-(105,1.1)
LINE (0,0)-(0,1):LOCATE 2,2:?"x"
LINE (100,0)-(0,0):LOCATE 22,75:?"t"
LOCATE 2,50:?"a=":PRINT USING "#.###";a

REM "Cálculo del comportamiento temporal"
FOR i=0 TO 100
  LINE -(i,zo)
  zo=a*zo*(1-zo)
NEXT i
GOTO 20

REM "Instrucciones para la graficación"
CLS
WINDOW (2.75,-0.1)-(4.1,1.1)
LINE (2.8,0)-(4,1),,b
LOCATE 2,2:?"x":LOCATE 23,77:?"a"

REM "Generación de la cascada de bifurcaciones"
FOR a=2.8 TO 4 STEP .002
  FOR i=1 TO 50
    zo=a*zo*(1-zo)
    IF i>25 THEN PSET (a,zo)
  NEXT i
NEXT a
20 END
  
```

PROGRAMA PARA EL CIRCUITO RLC

```

SCREEN 2
INPUT "Elige el potencial de entrada Vo (0-5.6) ",vo
CLS

REM "Instrucciones para la graficación"
WINDOW (-1.2*vo,-1.8*vo)-(.12*vo,0.3*vo)
LINE (-1.2*vo,-1.75*vo)-(.12*vo,0.3*vo),,B
LINE (-1.2*vo,-0.725*vo)-(.12*vo,-0.725*vo)
LOCATE 1,2:?"Q/C":LOCATE 12,70:?"Tiempo":LOCATE
14,2:?"Q/C"
LOCATE 23,76:?"V":LOCATE 14,72:?"Vo="
LOCATE 14,76:PRINT USING "#.###";vo

REM "Datos"
l=2:c=1:w=1.5:r=1
dt=0.02:q=0:i=0

REM "solución de la ecuación diferencial"
FOR t=0 TO 200 STEP dt
  v=vo*sin(w*t)
  vc=q/c/(1-q/c)
  f=v-vc-r*i
  a=f/l
  i=i+a*dt
  q=q+i*dt
  IF t<100 THEN 10
  PSET (v,q/c-vo):PSET (1.2*vo*(0.02*t-3),q/c)
10 NEXT t
END
  
```